

Wat er écht in de wandelgangen gebeurt

Een integrale analyse van mensenstromen in het nieuwe
Mondial College schoolgebouw

Myrthe Sas

Bram Leisink

Klas 6 vwo, Mondial College Leuvenbroek, Nijmegen

Begeleider: Henk Kerssies

Opdrachtgever: Mondial College, Mike Hesseling (Facilitair Manager), Gert-Jan Jansen (Rector)

5 december 2025

Samenvatting

Dit onderzoek analyseert de verwachte mensenstromen in het nieuwe schoolgebouw van het Mondial College door empirische observaties, geometrische analyse en rooster-gedreven grafentheoretische simulaties te combineren. Als onderdeel van de modelselectie is het Social Force Model geïmplementeerd en geëvalueerd; op de schaal van het volledige gebouw bleek dit computationeel onuitvoerbaar, wat de keuze voor een grafentheoretische aanpak onderbouwt. Experimentele metingen laten zien dat groepsvorming, routinegedrag en afleiding door smartphones een substantiële invloed hebben op doorstroming, met name bij bochten, deuren en kruispunten. De simulaties tonen aan dat leerlingstromen zich sterk concentreren rond een beperkt aantal topologische knooppunten, waarbij de centrale hal tijdens piekmomenten structureel het meest wordt belast met een doorgangskans van 62%. Optimalisatie van de lokaalindeling via Simulated Annealing leidt tot statistisch aantoonbare maar bescheiden verbeteringen in de spreiding van loopstromen (Gini-reductie 3%), maar reduceert de structurele congestie nauwelijks. Het onderzoek laat daarmee zien dat in een rooster-gedreven schoolomgeving doorstroomproblemen primair worden bepaald door ruimtelijke topologie en gedrag, en slechts in beperkte mate beïnvloedbaar zijn door allocatieve optimalisatie van lokalen. Effectieve maatregelen liggen daarom vooral in gerichte ruimtelijke en organisatorische ingrepen, eerder dan in herindeling van het lokaalgebruik.

Kernwoorden: crowd dynamics, voetgangerssimulatie, grafentheorie, schoolgebouwwontwerp, Simulated Annealing, gedragsmodellering, pre-occupancy analyse

Inhoudsopgave

1 Inleiding	1	5 Conclusie	14
1.1 Aanleiding en context	1	5.1 Beantwoording deelvragen en kernbevindingen	15
1.2 Relevantie	2	5.2 Vergelijking met het huidige gebouw	15
1.3 Onderzoeksvragen	3	5.3 Praktische implicaties	15
1.4 Leeswijzer	3	6 Discussie	16
2 Theoretisch Kader	3	6.1 Methodologische reflectie en beperkingen	16
2.1 Historische ontwikkeling van menigtdynamica	3	6.2 Lokaalindeling optimalisatie: diepgaande analyse	16
2.2 Macroscopische modellen: De vloeistofdynamica analogie	3	6.3 Implicaties voor onderwijsontwerp	18
2.3 Microscopische modellen: Agent-based simulaties	4	6.4 Toekomstperspectieven	18
2.4 Grafentheoretische modellen voor gestructureerde omgevingen	5	6.5 Afsluitende reflectie	19
2.5 Optimalisatietheorie: Simulated Annealing	6	A Fundamenteel diagram van voetgangersstromen	21
2.6 Model selectie en motivatie	7	B Empirische Analyse – van betrokkenen	21
2.7 Gedragsfactoren en menselijke variabiliteit	7	B.1 Inzichten van de roostermaker	21
3 Methoden	7	B.2 Perspectieven van docenten	21
3.1 Empirische karakterisering	7	B.3 Perspectieven van leerlingen	22
3.2 Geometrische analyse en grafconstructie	8	B.4 Conclusie van de interviewanalyse	22
3.3 Optimalisatie van lokaalindeling	9	C Vlekkenplannen	22
4 Resultaten	10	D Leerlingstromen heatmaps	22
4.1 Karakterisering van leerlinggedrag	10	E Afstanden tussen lokalen	27
4.2 Aanvullende observaties locatiebezoek	11	1 Inleiding	
4.3 Gedragsobservaties	11	1.1 Aanleiding en context	
4.4 Geometrische analyse	12	Het Mondial College staat aan het begin van een ingrijpende verandering: de locatie Leuvenbroek verhuist naar een	
4.5 Lokaalindeling optimalisatie	13		
4.6 Interviews	14		

nieuw schoolgebouw aan de Energieweg 93 te Nijmegen. Deze verhuizing biedt duidelijke kansen, zoals een modernere leeromgeving, verbeterde duurzaamheid en betere faciliteiten (Mondial College, 2025). Tegelijkertijd introduceert zij nieuwe onzekerheden, met name rond het gedrag van leerlingen in een onbekende ruimtelijke context. Hoe verplaatsen leerlingen zich tijdens drukke leswisselingen, in pauzes of in noodsituaties? En waar kunnen opstoppingen, vertragingen of veiligheidsrisico's ontstaan?

Een schoolgebouw is geen neutrale ruimte. De fysieke structuur – gangbreedtes, trappenhuizen, deuren en kruispunten – vormt in sterke mate het gedrag van de mensen die zich erdoorheen bewegen. Dit effect wordt versterkt door typisch menselijk gedrag, zoals groepsvorming, routinegedrag en afleiding door smartphones. In het huidige gebouw zijn door jarenlange ervaring informele looproutes en gedragsregels ontstaan. In het nieuwe gebouw ontbreekt dit collectieve geheugen volledig. Juist in combinatie met hoge dichtheden tijdens leswisselingen ($n \approx 1200$ leerlingen binnen $\Delta t \approx 3$ minuten) vergroot dit de kans op congestie en potentieel onveilige situaties.

Omdat het nieuwe gebouw nog niet in gebruik is, biedt deze situatie een unieke mogelijkheid tot *pre-occupancy analyse*: het vooraf meten, modelleren en simuleren van verwachte mensenstromen. Hierdoor kunnen structurele knelpunten worden geïdentificeerd en aangepakt vóórdat zij zich in de praktijk manifesteren.

Probleemstelling Op dit moment ontbreekt een empirisch gevalideerd en modelmatig onderbouwd inzicht in de verwachte mensenstromen binnen het nieuwe schoolgebouw van het Mondial College. Daardoor is onduidelijk waar structurele knelpunten en veiligheidsrisico's zullen optreden, en in hoeverre deze te mitigeren zijn via architectonische, organisatorische of rooster-gerelateerde maatregelen.

Belangrijkste bijdrage Dit onderzoek laat zien dat in een rooster-gedreven schoolomgeving congestie in mensenstromen primair wordt bepaald door ruimtelijke topologie en menselijk gedrag, en slechts in beperkte mate beïnvloedbaar is door allocatieve optimalisatie van lokaalindeling. Doorstroomproblemen blijken daarmee vooral een topologisch probleem, geen organisatorisch probleem.

Afbakening Dit onderzoek richt zich uitsluitend op interne voetgangersstromen binnen het nieuwe schoolgebouw. Externe factoren zoals fietsenstallingen, buitenterreinen en noodhulpverlening vallen buiten de scope. Daarnaast wordt alleen gekeken naar loopgedrag tijdens leswisselingen, pauzes en een geabstraheerd evacuatie-scenario; incidentele uitzonderingssituaties en menselijk gedrag onder extreme stress worden niet meegenomen.

Korte methodische introductie Ter beantwoording van de probleemstelling combineren wij drie complementaire onderzoeksmethoden. Ten eerste voeren wij empirische experimenten uit met leerlingen in een gecontroleerde gymzaalopstelling, waarmee snelheidsverdelingen, dichtheidsafhankelijke interacties en groepsgedrag worden gekarakteriseerd.

Ten tweede analyseren wij het nieuwe gebouw geometrisch en grafentheoretisch op basis van BIM-tekeningen, resulterend in een topologisch model van gangen, trappen en lokalen. Ten derde gebruiken wij rooster-gedreven simulaties en optimalisatie via Simulated Annealing om te onderzoeken waar congestie ontstaat en in hoeverre lokaalindeling deze kan beïnvloeden. Deze multiscale benadering maakt het mogelijk theoretische doorstroomcapaciteiten te koppelen aan realistisch leerlinggedrag.

1.2 Relevantie

1.2.1 Wetenschappelijke relevantie

Voetgangersdynamica is een breed onderzocht domein, met toepassingen variërend van stationsontwerp (Bosina & Meeder, 2017) tot festivalcrowdmanagement (Parisi et al., 2021). De specifieke context van middelbare schoolgebouwen is echter nauwelijks bestudeerd. Scholen wijken fundamenteel af van veel klassieke crowd dynamics-scenario's door hun organisatorische en sociale structuur:

- **Deterministische routing:** In tegenstelling tot publieke ruimtes worden loopstromen in scholen grotendeels bepaald door vaste lesroosters, wat leidt tot sterk voorspelbare maar geconcentreerde piekstromen.
- **Periodieke piekbelasting:** Gelijktijdige leswisselingen veroorzaken extreme, kortdurende dichtheden ($\rho_{\text{piek}}/\rho_{\text{basis}} > 10$), waarmee de aanname van stationariteit in veel modellen wordt doorbroken.
- **Sociaal-cohesieve groepen:** Leerlingen bewegen zich vaak in hechte groepen, wat resulteert in gecorreleerde snelheids- en routekeuzes die in standaardmenigtemodellen onderbelicht blijven (Moussaïd et al., 2010).

Dit onderzoek heeft daarmee een tweeledig wetenschappelijk doel: het toetsen van bestaande crowd dynamics-modellen in een onderbelichte context, en het ontwikkelen van methodologische aanpassingen die beter aansluiten bij rooster-gestuurde omgevingen.

1.2.2 Praktische relevantie

Voor het Mondial College biedt dit onderzoek concrete handvatten voor besluitvorming voorafgaand aan de ingebruikname van het nieuwe gebouw. Concreet richt het onderzoek zich op:

1. het kwantificeren van knelpunten, wachttijden en congestieniveaus;
2. het formuleren van onderbouwde aanbevelingen voor ruimtelijke aanpassingen (zoals gangbreedtes, deurpositionering en trappenhuistoegang);
3. het evalueren van organisatorische maatregelen, zoals gespreide leswisselingen of looprichtlijnen;
4. het opleveren van een gevalideerd simulatiemodel waarmee toekomstige scenario's kunnen worden doorerekend.

1.3 Onderzoeksvragen

1.3.1 Hoofdvraag

In hoeverre biedt een combinatie van empirische gedragskarakterisering, grafentheoretische gebouwmodellering en algoritme-gestuurde optimalisatie inzicht in de verwachte mensenstromen in het nieuwe schoolgebouw van het Mondial College, en welke ruimtelijke of organisatorische maatregelen reduceren structurele congestie aantoonbaar?

1.3.2 Deelvragen

Deze hoofdvraag wordt uitgewerkt aan de hand van vijf samenhangende deelvragen:

1. Welke theoretische modellen bestaan er om mensenstromen in gebouwen te beschrijven, en welk model is het meest geschikt voor een rooster-gedreven schoolomgeving?
2. Hoe beïnvloeden geometrische eigenschappen zoals gangbreedte, kruispunten en trappen de maximale doorstroomcapaciteit, en waar concentreren leerlingstromen zich in het nieuwe gebouw?
3. Welke snelheidsverdelingen en gedragskenmerken zijn empirisch waarneembaar bij leerlingen van het Mondial College, en hoe beïnvloeden groepsvorming, obstakels en smartphonegebruik de doorstroom?
4. In hoeverre kan algoritme-gestuurde optimalisatie van de lokaalindeling via Simulated Annealing de ongelijkheid in gangbelasting reduceren?
5. Welke ruimtelijke of organisatorische maatregelen reduceren structurele congestie aantoonbaar, gegeven de topologische en gedragsmatige beperkingen van het gebouw?

1.4 Leeswijzer

Hoofdstuk 2 introduceert het theoretisch kader: we bespreken relevante modelleringsparadigma's voor menigtedynamica, motiveren onze keuze voor een grafentheoretische aanpak op basis van een eigen implementatie van het Social Force Model, en behandelen de optimalisatietheorie achter Simulated Annealing. Hoofdstuk 3 beschrijft de methoden: de gecontroleerde gymzaalexperimenten voor gedragskarakterisering, de geometrische analyse en grafconstructie op basis van BIM-tekeningen, en de rooster-gedreven simulatie- en optimalisatiepipeline. Hoofdstuk 4 presenteert de resultaten van deze drie onderdelen: empirische gedragsobservaties en snelheidsmetingen, de geometrische belastingsanalyse van het nieuwe gebouw, en de uitkomsten van de SA-optimalisatie van de lokaalindeling. Hoofdstuk 5 formuleert de conclusies en beantwoordt de hoofdeelvragen. Hoofdstuk 6 bevat de discussie, met een methodologische reflectie, een analyse van de beperkingen van het onderzoek en aanbevelingen voor vervolgonderzoek.

2 Theoretisch Kader

De analyse van mensenstromingen in gebouwde omgevingen vereist een interdisciplinaire combinatie van concepten uit de natuurkunde, wiskunde, en gedragswetenschappen. In deze sectie presenteren we een systematisch overzicht van relevante modelleringsparadigma's, te beginnen met een historisch perspectief op de ontwikkeling van crowd dynamics als wetenschappelijk veld. We beschrijven vervolgens drie klassen van modellen — macroscopisch, microscopisch en grafentheoretisch — en motiveren op basis van een systematische vergelijking waarom we uiteindelijk voor een grafentheoretische aanpak hebben gekozen. Het microscopische Social Force Model speelde daarin een bijzondere rol: we hebben het geïmplementeerd en onderzocht als tussenliggende stap, maar zijn op basis van praktische overwegingen tot de conclusie gekomen dat het op de schaal van dit onderzoek niet toereikend was.

2.1 Historische ontwikkeling van menigtedynamica

De wetenschappelijke studie van mensenmassa's vindt zijn oorsprong in 19e-eeuwse sociale psychologie, met name het werk van LeBon (2017) over "crowd psychology". Deze vroege studies waren voornamelijk kwalitatief en richtten zich op gedragsveranderingen in collectieve contexten. De kwantitatieve analyse van voetgangersbewegingen ontstond pas in de tweede helft van de 20e eeuw, gestimuleerd door praktische behoeften in urban planning en gebouwtwerp.

Een cruciale doorbraak kwam met het werk van Henderson (1974), die als eerste vloeistofdynamica vergelijkingen toepaste op voetgangersstromen, analoog aan verkeersstroming. Deze *macroscopische* benadering beschouwt de menigte als een continuüm gekarakteriseerd door dichtheid $\rho(\mathbf{x}, t)$ en snelheidsveld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Parallel hieraan ontwikkelde zich de *microscopische* benadering, die individuen modelleert als discrete agenten. Het baanbrekende "Social Force Model" van Helbing en Molnar (1995) formaliseerde hoe voetgangers navigeren via een balans van aantrekkende (doel) en afstotende (andere mensen, obstakels) krachten. Dit model genereert emergent collectief gedrag uit individuele interacties.

In de 21e eeuw zorgden twee ontwikkelingen voor exponentiële groei in het veld: (1) toenemende computerkracht voor large-scale agent-based simulaties, en (2) nieuwe tracking technologieën (video, sensoren, smartphones) voor empirische validatie (Corbetta & Toschi, 2023).

2.2 Macroscopische modellen: De vloeistofdynamica analogie

Macroscopische modellen beschouwen een menigte als een continuüm, gekarakteriseerd door gladde velden van dichtheid en snelheid. De fundamentele vergelijking is de continuïteitsvergelijking (behoud van massa):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

waarin $\rho(\mathbf{x}, t)$ de voetgangersdichtheid (personen/m²) en $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ het snelheidsveld (m/s) representeren ¹. Dit is geïn-

¹We kiezen er voor om voor vectoren in plaats van de middelbareschoolnotatie (\vec{v}) de vetgedrukte notatie \mathbf{v} te gebruiken, omdat dit consistent is

spireerd op de vloeistofdynamica, waar dezelfde modellen voorkomen om gassen en vloeistoffen te modelleren.

2.2.1 Fundamenteel diagram en capaciteitsrelaties

Een centrale observatie in voetgangersdynamica is het empirisch vastgestelde *fundamenteel diagram*: de relatie tussen dichtheid ρ , snelheid v , en flux $J = \rho v$ (Seyfried et al., 2006). Voor lage dichtheden ($\rho < 1$ pers/m²) bewegen voetgangers bij vrije snelheid $v_0 \approx 1.3$ m/s. Bij toenemende dichtheid daalt de snelheid monotoon, beschreven door bijvoorbeeld de Greenshields relatie (“03. Fundamental Diagram”, z.d.):

$$v(\rho) = v_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (2)$$

met $\rho_{\max} \approx 5$ pers/m² de maximale jam density. De flux bereikt een maximum bij $\rho_{\text{opt}} \approx 2.5$ pers/m²:

$$J_{\max} = \max_{\rho} J(\rho) = \frac{v_0 \rho_{\max}}{4} \approx 1.625 \text{ pers} \cdot \text{m}^{-1} \text{s}^{-1} \quad (3)$$

De volledige afleiding staat in bijlage A. Deze relatie biedt een theoretische bovengrens voor de doorstroomb capaciteit van een gang met breedte b : de maximale flux bedraagt $b \cdot J_{\max}$ personen per seconde. Voor een gang van 2 m breed geeft dit een theoretisch maximum van circa 3.25 pers/s, ofwel ~ 195 pers/min — een referentiewaarde die we in de geometrische analyse als maatstaf hanteren.

2.2.2 Lighthill-Whitham-Richards (LWR) model

Voor dynamische situaties kan vergelijking (1) worden gecombineerd met een flux-dichtheidsrelatie $J(\rho)$ tot het LWR-model (Lighthill & Whitham, 1955):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J(\rho)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Dit hyperbolische systeem voorspelt schokgolven (plotselinge overgangen tussen lage en hoge dichtheid) die overeenkomen met waargenomen stop-and-go patronen in voetgangersstromen.

2.2.3 Beperkingen voor schoolapplicaties

Ondanks wiskundige elegantie heeft de macroscopische benadering fundamentele beperkingen in onze context:

- **Continuümaanname faalt:** Schoolgangen hebben typisch $w \approx 2\text{--}4$ m, wat betekent dat zelfs bij ρ_{opt} slechts 5–10 mensen naast elkaar lopen. Dit is onvoldoende voor een betrouwbare continuümbenadering.
- **Heterogene doelen:** Vloeistofmodellen veronderstellen uniforme stromingsrichting. In scholen heeft elke leerling een unieke bestemming, leidend tot complexe kruisende stromen.
- **Discrete events:** Leswisselingen genereren abrupte bronnen en sinks (lokale die simultaan leeg- en vollopen), wat niet goed gevangen wordt door gladde PDEs.

met de literatuur.

Macroscopische modellen zijn daarmee ongeschikt als primair simulatiemodel voor dit onderzoek, maar bieden wel waardevolle theoretische bovengrenzen voor gangcapaciteiten, die we in de geometrische analyse benutten.

2.3 Microscopische modellen: Agent-based simulaties

Microscopische simulaties beschrijven elke voetganger als een autonome agent met een eigen interne staat (positie, snelheid, doel) en gedragsregels die bepalen hoe deze zich door de ruimte beweegt.

2.3.1 Social Force Model

Een van de meest invloedrijke benaderingen is het Social Force Model (SFM) van Helbing en Molnar (1995). Hierin ondervindt agent i een resulterende kracht:

$$\mathbf{F}_i^{\text{res}} = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^{\text{doel}} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}^{\text{rep}} + \sum_w \mathbf{F}_{iw}^{\text{muur}} \quad (5)$$

waarbij de verschillende componenten het volgende voorstellen:

1. **Doel-kracht:** Stuurt de agent richting zijn bestemming met een gewenste snelheid \mathbf{v}_i^0 :

$$\mathbf{F}_i^{\text{doel}} = \frac{m_i}{\tau} (\mathbf{v}_i^0 - \mathbf{v}_i) \quad (6)$$

met een typische reactietijd $\tau \approx 0.5$ s.

2. **Inter-agent repulsie:** Een exponentieel afnemende afstotingskracht die persoonlijke ruimte bewaakt:

$$\mathbf{F}_{ij}^{\text{rep}} = A \exp\left(\frac{r_{ij} - d_{ij}}{B}\right) \mathbf{n}_{ij} \quad (7)$$

waarbij d_{ij} de onderlinge afstand is, r_{ij} de som van agent-radii, en \mathbf{n}_{ij} de eenheidsvector van i naar j . Waarden als $A \approx 2000$ N en $B \approx 0.08$ m komen uit empirische kalibratie (Helbing & Molnar, 1995).

3. **Muur-repulsie:** Een vergelijkbare exponentiële afstoting door wanden en obstakels.

Dit model reproduceert zonder expliciet geprogrammeerde regels typische collectieve patronen, zoals lane formation bij tegengestelde stromen en oscillaties bij flessenhalzen.

2.3.2 Uitbreidingen en varianten

In de literatuur zijn vele uitbreidingen voorgesteld, waaronder:

- **Elliptische agenten** (Chraïbi et al., 2010): Hiermee wordt anisotrope persoonlijke ruimte realistischer weergegeven, vooral in de voorwaartse richting.
- **Anticipatie:** Agenten schatten toekomstige posities van anderen en vermijden proactief botsingen (Karamouzas et al., 2014).
- **Groepscoherentie:** Toegevoegde aantrekkingskrachten binnen sociale groepen modelleren het bewegingsgedrag van vriendengroepjes (Moussaïd et al., 2010).

2.3.3 Eigen implementatie en praktische bevindingen

Als onderdeel van dit onderzoek hebben we het SFM zelf geïmplementeerd in Python, met als doel het model te gebruiken voor lokale validatie van experimentele gedragsobservaties. De implementatie omvatte de drie krachttermen uit vergelijking (5), numerieke integratie via een Euler-stap met tijdstap $\Delta t = 0.05$ s, en een eenvoudige collision-detection op basis van agentradii.

Bij experimenten op kleine schaal — enkele tientallen agenten in een rechte gang of bij een deuropening — reproduceerde de implementatie kwalitatief herkenbare patronen: lane formation bij tegengestelde stromen, en vertraging bij vernauwingen. Dit bevestigt dat de implementatie correct werkt en sluit aan bij de literatuur.

Op de schaal van het volledige schoolgebouw ($N \approx 1200$ leerlingen, $|V| = 388$ knooppunten) bleek het SFM echter praktisch onuitvoerbaar. De rekencomplexiteit van $O(N^2)$ per tijdstap — zelfs met spatial binning teruggebracht naar $O(N)$, maar met een hoge constante factor door de continue toestandsruimte — resulteerde in simulatietijden van meerdere uren per leswisseling. Daarnaast vereist het SFM een continue plattegrond waarop agenten vrij kunnen bewegen; het omzetten van de BIM-tekeningen naar een geschikt 2D-loopbaar vlak bleek een aanzienlijke technische drempel. Ten slotte zijn de modelparameters (A , B , τ) gevoelig en vereisen kalibratie op populatiespecifieke data, wat met onze trackingdata wel partieel mogelijk was maar onvoldoende nauwkeurig voor betrouwbare whole-building simulaties.

Deze bevindingen zijn consistent met de bredere literatuur, die het SFM aanbeveelt voor lokale analyses en evacuatiesimulaties van beperkte omvang, maar niet voor grootschalige routing in rooster-gedreven omgevingen (Corbetta & Toschi, 2023). Op basis hiervan hebben we besloten het SFM niet als primair simulatiemodel te gebruiken, maar wel als kwalitatief referentiekader: de gedragspatronen die het model voorspelt (lane formation, binnenbocht-voorkeur, groepscohesie) zijn leidend geweest bij de interpretatie van onze experimentele observaties.

2.3.4 Computational overwegingen

Een belangrijk nadeel van microscopische modellen is de rekenlast, zoals ook onze eigen implementatie bevestigde. Voor N agenten kost elke tijdstap $O(N^2)$ omdat alle onderlinge interacties geëvalueerd worden. Door *spatial binning* kan dit worden teruggebracht naar $O(N)$ per tijdstap, maar de continue toestandsruimte en kleine benodigde tijdstappen ($\Delta t \sim 0.05$ s) maken dat een volledige schoolweek simuleren met $N = 1200$ agenten ook dan prohibitief duur is. Dit maakt het SFM ongeschikt als primair model voor dit onderzoek, maar waardevol als validatie-instrument voor lokale gedragspatronen.

2.4 Grafentheoretische modellen voor gestructureerde omgevingen

In omgevingen zoals schoolgebouwen, waar looproutes duidelijk gedefinieerd zijn door gangen, deuren en trappen, bieden grafen een compacte en overzichtelijke manier om de ruimtelijke structuur te modelleren. Waar het SFM individuele posities in continue ruimte bijhoudt, abstraheert

een grafenmodel het gebouw tot een netwerk van discrete knooppunten en verbindingen — een verlies aan ruimtelijk detail dat wordt gecompenseerd door een enorme winst in rekentijd en directe koppelbaarheid aan roosterdata.

2.4.1 Definitie en representatie

We representeren het gebouw als een gewogen graaf $G = (V, E, w)$, waarbij:

- **Vertices** V : Discrete locaties (lokalen, knooppunten in gangen, trappen).
- **Edges** $E \subseteq V \times V$: Mogelijke verplaatsingen tussen deze locaties.
- **Gewichten** $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$: Reistijd op basis van afstand en loopsnelheid.

Een gang van 20 m met gemiddelde loopsnelheid $\bar{v} = 1.47$ m/s (empirisch gemeten, zie Sectie 4.3.1) krijgt bijvoorbeeld gewicht $w = 20/1.47 \approx 13.6$ s.

2.4.2 Routing algoritmes

Gegeven een startpunt $s \in V$ en bestemming $t \in V$ levert een kortste-pad algoritme de optimale route. Voor niet-negatieve gewichten is Dijkstra's algoritme efficiënt met complexiteit $O(|E| + |V| \log |V|)$ (Dijkstra et al., z.d.).

Bij schoolscenario's, waar drukte per leswissel kan variëren, zijn tijdsafhankelijke gewichten nuttig. Dit leidt tot het Time-Dependent Shortest Path probleem, oplosbaar via aangepaste Dijkstra-varianten. In dit onderzoek hanteren we statische gewichten als benadering, wat gerechtvaardigd is omdat het rooster de routes grotendeels determineert en congestie-terugkoppeling in de primaire analyse buiten scope valt.

2.4.3 Voordelen en limitaties

De grafenbenadering heeft duidelijke voordelen ten opzichte van de eerder besproken modellen:

- Rekenkundig efficiënt: $O(N \cdot |V| \log |V|)$ voor N leerlingen, waardoor een volledige schoolweek in seconden te simuleren is.
- Directe integratie met roosterdata: elke leswissel definieert een $s \rightarrow t$ -paar dat rechtstreeks als invoer dient.
- Expliciete topologie: knelpunten zijn direct aflesbaar uit de graafstructuur.

Tegenover deze voordelen staan reële beperkingen. Het model bevat geen posities binnen een gang, geen dynamische interacties tussen leerlingen, en geen emergent groepsgedrag zoals lane formation. Voor de primaire onderzoeksdoelen — identificatie van structurele knelpunten en evaluatie van lokaalindelingen op gebouwniveau — zijn deze beperkingen acceptabel. Voor gedetailleerde lokale analyses, zoals het gedrag bij een specifieke deuropening, zou een microscopische aanpak waardevol zijn als aanvulling.

2.5 Optimalisatietheorie: Simulated Annealing

Naast het modelleren van mensenstromen is een centrale vraag hoe de *indeling* van het gebouw geoptimaliseerd kan worden. Gegeven een set oude lokaalnummers (uit het huidige rooster) en een set nieuwe fysieke lokalen, hoe wijzen we deze toe om de belasting over het gebouwnetwerk zo gelijk mogelijk te verdelen?

Dit vormt een *combinatorisch optimalisatieprobleem*: met n lokalen zijn er $n!$ mogelijke toewijzingen, wat zelfs voor middelgrote scholen ($n \approx 50$) leidt tot astronomische aantallen ($50! \approx 3 \cdot 10^{64}$). Exhaustieve zoekstrategieën zijn daarom ondoenlijk.

2.5.1 Het Simulated Annealing algoritme

Simulated Annealing (SA), geïntroduceerd door Kirkpatrick et al. (1983), is een probabilistisch optimalisatie-algoritme geïnspireerd op het fysische proces van metaalgluieren (*annealing*). Bij verhitting worden atomen in een metaalrooster mobiel; bij geleidelijke afkoeling stabiliseren ze in een energetisch gunstige configuratie.

Wiskundige formulering Gegeven een toestandsruimte \mathcal{S} en kostenfunctie $E : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, zoekt SA naar:

$$s^* = \arg \min_{s \in \mathcal{S}} E(s) \quad (8)$$

Het algoritme itereert als volgt:

Algoritme 1 Simulated Annealing

```

1:  $s \leftarrow s_0$                                 ▶ Initiële toewijzing
2:  $T \leftarrow T_0$                                 ▶ Start temperatuur
3: for  $i = 1$  to  $N_{\max}$  do
4:    $s' \leftarrow \text{neighbor}(s)$                 ▶ Genereer buuroplossing
5:    $\Delta E \leftarrow E(s') - E(s)$ 
6:   if  $\Delta E < 0$  or  $\text{random}() < e^{-\Delta E/T}$  then
7:      $s \leftarrow s'$                             ▶ Accepteer nieuwe toestand
8:   end if
9:    $T \leftarrow \alpha \cdot T$                     ▶ Temperatuur afkoeling
10: end for
11: return  $s_{\text{best}}$ 

```

De cruciale eigenschap is de *Metropolis-criterion* (regel 6): slechtere oplossingen worden soms geaccepteerd met kans $P(\Delta E, T) = \exp(-\Delta E/T)$. Dit voorkomt dat het algoritme vastloopt in lokale minima — een probleem dat we bij greedy-alternatieven direct tegenkwamen (zie Sectie 2.5.4).

Temperatuurschema De temperatuur $T(t)$ bepaalt de exploratiegraad:

- Bij hoge T : vrijwel alle moves worden geaccepteerd \Rightarrow brede exploratie
- Bij lage T : alleen verbeteringen worden geaccepteerd \Rightarrow lokale exploitatie

Een typisch exponentieel afkoelschema is:

$$T(t) = T_0 \cdot \alpha^t, \quad 0.8 < \alpha < 0.99 \quad (9)$$

Voor onze toepassing gebruiken we $T_0 = 100$, $\alpha = 0.98$, wat na ~ 500 iteraties convergeert naar quasi-deterministisch gedrag.

2.5.2 Toepassing op lokaalindeling

Voor ons probleem definiëren we:

Toestandsruimte Een toestand s is een bijectieve mapping $\phi : L_{\text{oud}} \rightarrow L_{\text{nieuw}}$ van oude naar nieuwe lokaalnummers, met de constraint dat bepaalde lokalen gefixeerd blijven (bijv. gymzalen, praktijklokalen).

Kostenfunctie We definiëren de kwaliteit van een toewijzing via de *edge load balancing*:

$$E(s) = \sigma(\{n_e\}_{e \in E}) + \lambda \cdot \max_e (n_e - \bar{n} - 2\sigma)_+ \quad (10)$$

waarbij:

- n_e : aantal passages over edge e onder toewijzing s
- $\sigma(\cdot)$: standaarddeviatie (maat voor ongelijkheid)
- \bar{n} : gemiddeld aantal passages
- Tweede term: penalty voor extreme outliers (bottle-necks $> \mu + 2\sigma$)
- $\lambda = 10$: penalty gewicht

Een lagere $E(s)$ correspondeert met een meer gebalanceerde belasting over het gebouw.

Neighbor generatie We genereren een buuroplossing door 1–3 willekeurige paren lokalen te swappen:

$$s' = s \circ \tau_{i,j}, \quad \text{met } \tau_{i,j}(i) = j, \tau_{i,j}(j) = i \quad (11)$$

Deze lokale perturbaties zorgen voor geleidelijke exploratie van de toestandsruimte.

2.5.3 Theoretische eigenschappen

Onder bepaalde aannames (voldoende lange looptijd, juist temperatuurschema) convergeert SA met kans 1 naar het globale optimum (Granville et al., 1994):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(s(t) = s^*) = 1 \quad (12)$$

2.5.4 Alternatieve benaderingen

We overwogen ook:

- **Genetische algoritmes**: Populatie-gebaseerde optimalisatie. Nadeel: hogere computationele kosten en complexere implementatie zonder aantoonbaar betere resultaten voor dit type probleem.
- **Integer Linear Programming**: Exacte methode, maar prohibitief voor $n > 30$ door exponentiële complexiteit.
- **Greedy heuristics**: Snel maar blijft structureel steken in lokale minima, zoals pilot-experimenten bevestigden.

SA biedt de beste trade-off tussen kwaliteit en rekentijd voor onze schoolschaal ($n \approx 30$ flexibele lokalen).

2.6 Model selectie en motivatie

Tabel 1 vat onze systematische evaluatie samen. De modelkeuze is niet alleen theoretisch gemotiveerd, maar vloeit ook voort uit concrete ervaringen tijdens dit onderzoek: het SFM is geïmplementeerd en getest, maar bleek op whole-building schaal onbruikbaar; macroscopische modellen bieden nuttige bovengrenzen maar geen bruikbare routeringssimulaties.

Op basis hiervan hanteren we voor dit onderzoek de volgende strategie:

1. **Primair model:** Grafentheoretische representatie voor rooster-gedreven simulaties op gebouwniveau.
2. **Kwalitatieve referentie:** SFM-inzichten als interpretatiekader voor waargenomen gedragspatronen uit de experimenten (lane formation, groepscohesie, binnenbocht-voorkeur).
3. **Capaciteitsreferentie:** Macroscopische vloeistofmodellen voor theoretische bovengrenzen op gang- en deurdoorstroom, te vergelijken met gesimuleerde belastingen.

2.7 Gedragsfactoren en menselijke variabiliteit

Naast fysieke constraints spelen psychologische en sociale factoren een cruciale rol. Leswisselingen vormen een unieke sociale microkosmos waar gevestigde groepen tijdelijk opgaan in een grotere menigte, wat leidt tot voorspelbare gedragspatronen die de doorstroom beïnvloeden (Postmes & Spears, 1998). We identificeren drie hoofdcategorieën die relevant zijn voor schoolcontexten en die we empirisch hebben onderzocht.

2.7.1 Sociale cohesie en groepsformatie

Adolescenten vertonen een sterke neiging tot groepsbeweging. Leerlingen bewegen zich zelden als individuen, maar als onderdeel van kleine vriendengroepjes (Moussaïd et al., 2010). Dit manifesteert zich in verminderde gemiddelde snelheid (de groep wacht op het langzaamste lid), verhoogde gangbreedte-occupatie doordat groepen naast elkaar lopen en zo “eilandjes” van stagnatie vormen (Moussaïd et al., 2011), en gecorreleerde routekeuzes waarbij de groep de keuze van de leider volgt. In de experimenten was dit gedrag duidelijk waarneembaar en vormt het een van de kernbevindingen (zie Sectie 4).

2.7.2 Afdeling, multitasking en deïndividuele

De theorie van deïndividuele (Postmes & Spears, 1998) stelt dat individuen in een menigte een verminderd besef van zichzelf als individu ervaren, waardoor groepsnormen en klasnormen vervagen. Dit effect wordt in een schoolcontext versterkt door smartphonegebruik tijdens het lopen. Empirische studies tonen consistente effecten: snelheidsreductie en verminderde loopefficiëntie, hogere botsingskans door beperkter zichtveld, impulsief stopgedrag, en verminderde afstandsregulatie. In de experimenten hebben we dit effect systematisch onderzocht door scenario's met en zonder telefonopdracht te vergelijken.

2.7.3 Gewenning en routinevorming

Na enkele weken ontwikkelen leerlingen vaste routes en gedragspatronen, ongeacht of deze optimaal zijn voor de totale doorstroom. Dit *path hysteresis*-effect — de neiging om vertrouwde routes te herhalen ook als ze suboptimaal zijn — kan leiden tot ongelijke belasting van beschikbare routes. In een nieuw gebouw ontbreekt dit geheugen volledig, wat zowel een risico (ongeorganiseerde initiële patronen) als een kans (interventies via bewegwijzering zijn effectiever voordat routines zich hebben gevormd) inhoudt.

Deze drie gedragsfactoren verklaren waarom puur infrastructurele oplossingen vaak tekortschieten. De gang is een dynamische sociale ruimte waar gedrag wordt gestuurd door groepsdynamiek, afleiding en gewoontes. De empirische experimenten in dit onderzoek zijn er specifiek op gericht deze factoren kwantitatief in kaart te brengen, zodat ze als gekalibreerde parameters in de simulaties kunnen worden verwerkt.

3 Methoden

Onze methode bestaat uit drie complementaire onderdelen: (1) gecontroleerde empirische experimenten voor gedragskarakterisering, (2) geometrische en grafentheoretische analyse van het schoolgebouw op basis van zelfontwikkelde software, en (3) rooster-gedreven simulaties en optimalisatie voor bottleneck-identificatie. Deze sectie beschrijft elk onderdeel in detail, inclusief dataverzameling, verwerking en validatieprocedures.

3.1 Empirische karakterisering

3.1.1 Experimentele opstelling

Om snelheidsverdelingen en groepsgedrag te kwantificeren voerden we gecontroleerde experimenten uit in de gymzaal van de huidige Mondial College Leuvenbroek locatie. Deze setting bood de volgende voordelen:

- **Gecontroleerde omgeving:** Reproduceerbare condities zonder externe verstoringen.
- **Overhead camera-montage:** Rekstok-ophangpunt op $h \approx 7.5$ m hoogte voor bijna-orthografische projectie.
- **Flexibele opstelling:** Materiaal (kasten, matten) voor simulatie van gangen, deuren en kruispunten.

Deelnemers Via uitnodigingen aan mentoren recruteerden we $N = 208$ leerlingen (leeftijd 11–19). Deelname was vrijwillig met geïnformeerde toestemming volgens AVG-richtlijnen.

Groepen Het experiment werd telkens uitgevoerd met groepen van 15 tot 60 leerlingen, samengesteld uit meerdere mentorklassen, waarbij boven- en onderbouw werden gecombineerd.

Scenario's We simuleerden zeven scenario's:

1. Leerlingen liepen in groepen van uiteenlopende grootte door een rechte gang.

Tabel 1. Vergelijkende analyse van crowd dynamics modellen voor schoolgebouw-applicaties. De grafentheoretische benadering biedt optimale balans tussen nauwkeurigheid en computationele haalbaarheid voor rooster-gedreven analyses op gebouwniveau.

Benadering	Sterke punten	Beperkingen	Comp. kosten	Geschiktheid school
Macroscopisch (fluid)	Wiskundige elegantie; analytische upper bounds; gevestigde theorie	Continuüm aanname faalt bij $w < 5$ m; uniforme stroming assumptie	Laag ($O(n_{\text{grid}})$)	Ongeschikt als primair model; wel bruikbaar voor capaciteitsboven grenzen
Microscopisch (SFM)	Realistische gedragsreproductie; emergente fenomenen; geïmplementeerd en getest	Prohibitief bij whole-building schaal; vereist continue plattegrond; gevoelige parameterkalibratie	Hoog ($O(N^2)$, in praktijk $O(N)$ maar te traag)	Beperkt: bruikbaar voor lokale validatie en interpretatie van gedragspatronen
Grafentheoretisch	Computationeel efficiënt; natuurlijke rooster-integratie; expliciete topologie	Ruimtelijk detail verlies; geen dynamische interacties binnen een gang	Laag ($O(N \log V)$)	Optimaal: balanceert schaal, precisie en haalbaarheid voor dit onderzoek

2. Twee groepen van gelijke grootte liepen vanuit tegenovergestelde richtingen door een rechte gang.
3. Idem, met een tafel en stoel als obstakel in de gang.
4. Idem, met een deurconstructie in de gang.
5. Idem, door een gang met een bocht.
6. Idem, waarbij leerlingen vooraf de instructie kregen hun telefoon te gebruiken en een stilstaande persoon in het midden van de bocht stond.
7. Drie groepen bewogen zich door een T-splitsing.

Bij elk scenario is een variatie uitgevoerd waarbij leerlingen tijdens het lopen hun telefoon gebruikten, zodat het effect van smartphonegebruik systematisch kon worden gemeten.



Figuur 1. Frame uit de experiment-opnames, met looprichtingen aangegeven.

3.1.2 Data-acquisitie en preprocessing

Camerakalibratie Voor de gebruikte camera's is een kalibratie uitgevoerd om lensvervalsing en perspectivische afwijkingen te corrigeren. Hiervoor is een bewegend checkerboard-patroon gefilmd, waarmee de intrinsieke parameters en vervormingscoëfficiënten zijn bepaald — een standaardmethode binnen computervisie voor *camera calibration*. Op basis van deze parameters zijn alle videoframes

gerecorrigeerd en geschaald naar werkelijke afmetingen. De vloerbelijning van de gymzaal diende als externe referentie voor perspectiefnormalisatie. Het resultaat is weergegeven in Figuur 2.

Tracking pipeline Volledige automatische tracking bleek niet betrouwbaar uitvoerbaar. Daarom is gekozen voor een semi-automatische benadering: posities van leerlingen zijn handmatig geselecteerd op steekproefsgewijze frames en vervolgens door eigen trackingsoftware op basis van bewegingsdetectie geïnterpoleerd tot continue trajecten.

3.1.3 Afgeleide metrics

Uit de trajecten zijn drie categorieën metrics afgeleid. Ten eerste kinematische parameters: vrije loopsnelheid per individu, snelheidsreductie per scenario ten opzichte van de baseline, en vertraging bij bochten en deurpassages. Ten tweede ruimtelijke kenmerken: gangbreedte-occupatie per groep en lokale dichtheidsvariaties bij kruispunten. Ten derde kwalitatieve gedragspatronen: groepscoherentie, binnenbocht-voorkeur en het effect van smartphonegebruik op loopgedrag.

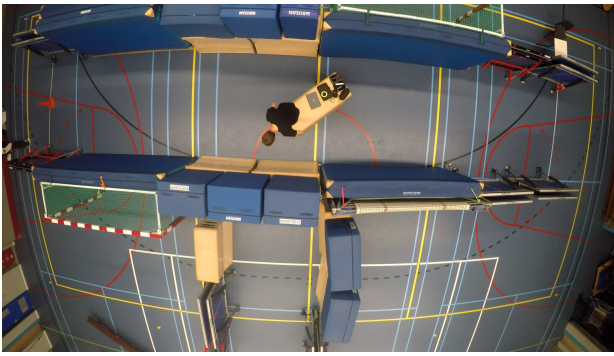
De experimentele data diende tevens als kwalitatief referentiekader voor het Social Force Model: de gedragspatronen die het SFM voorspelt — lane formation bij tegengestelde stromen, vertraging bij vernauwingen — zijn vergeleken met de geobserveerde patronen om te beoordelen in hoeverre het model de schoolcontext correct beschrijft. Een volledige parameteroptimalisatie van het SFM was op basis van de beschikbare data niet haalbaar en viel buiten de scope van dit onderzoek; de grafische overeenkomst volstaat als kwalitatieve validatie.

3.2 Geometrische analyse en grafconstructie

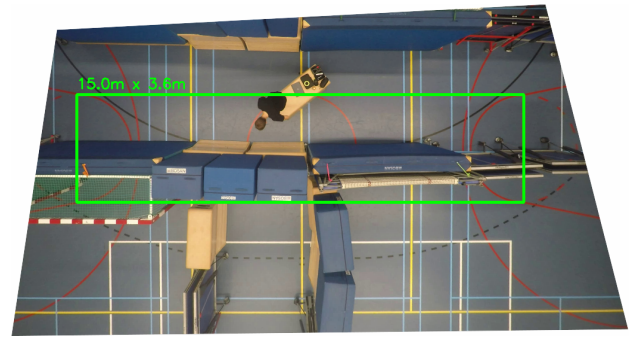
3.2.1 Gebouwdocumentatie

We verkregen van de facilitair manager de volgende BIM-data voor het nieuwe gebouw:

- Architecturale plattegronden per verdieping
- Vlekkenplan met lokaalfuncties (Appendix C)



(a) Origineel, zonder correctie



(b) Gecorrigeerd beeld na kalibratie

Figuur 2. Vergelijking tussen ongecorrigeerde en gekalibreerde camerabeelden.

3.2.2 Zelfontwikkelde graaf-software

Voor de omzetting van de BIM-plattegronden naar een analyseerbaar netwerk is eigen software ontwikkeld in Python. De software stelt de gebruiker in staat om interactief knooppunten en verbindingen in te tekenen op de geïmporteerde plattegrond, en ondersteunt gebouwen met meerdere verdiepingen via expliciete trapgedes die verdiepingen aan elkaar koppelen. Elke edge krijgt automatisch een gewicht toegewezen op basis van de gemeten lengte en de empirisch vastgestelde vrije loopsnelheid ($\bar{v} = 1.47$ m/s); trapgedes krijgen een gecorrigeerd gewicht dat de extra looptijd voor hoogteverschil reflecteert.

Het resulterende netwerk is direct visueel analyseerbaar: de software rendert de graaf bovenop de plattegrond en kan edge-belastingen als kleurgradiënt weergeven, wat de heatmaps in Figuur 8 en 9 heeft opgeleverd. Figuur 3 toont de software tijdens het annoteren van een segment van de begane-grond plattegrond.

**Figuur 3.** De zelfontwikkelde graaf-software, met daarop zichtbaar de geïmporteerde plattegrond en de geplaatste knooppunten en verbindingen voor een segment van de begane grond.

3.2.3 Topologische extractie

Op basis van de bouwtekeningen is voor het volledige gebouw een netwerk $G = (V, E, w)$ geconstrueerd. De verzameling knopen V is onderverdeeld in vier klassen:

- **Lokalen:** $N_{\text{lokaal}} = 51$ (start- en eindpunten voor leerlingroutes)
- **Secundaire eindbestemmingen:** $N_{\text{eind}} = 74$ (knopen met slechts één verbinding; bijv. bergingen)

- **Gangsegmenten:** $N_{\text{gang}} = 113$ (knopen met precies twee verbindingen)
- **Knooppunten:** $N_{\text{knoop}} = 150$ (kruispunten waar ≥ 3 gangen samenkomen)

Het totaal aantal knopen bedraagt $|V| = 388$. Omdat veel vertices slechts twee edges hebben — nodig voor correcte visuele positionering op de plattegrond, maar rekenkundig overbodig — zijn deze in de simulatiegraaf samengevoegd. Voor de vervangende edge geldt $w_{1+2} = w_1 + w_2$, zodat alle afstandsinformatie behouden blijft.

Edges ($|E| = 427$) Elke verbinding tussen twee vertices heeft de volgende attributen:

- Lengte L_e (m): gemeten op de plattegrond
- Breedte w_e (m): effectieve loopbreedte
- Type: gang, trap of doorgang

Het gebouw heeft zeven trappen, waarvan vijf algemeen toegankelijk, één buiten gebruik en één gesitueerd in een hoog lokaal.

3.3 Optimalisatie van lokaalindeling

Een uniek aspect van dit onderzoek is de mogelijkheid om *proactief* de lokaalindeling te optimaliseren vóór de verhuizing. We ontwikkelden hiervoor een Simulated Annealing framework dat de toewijzing van oude naar nieuwe lokaalnummers optimaliseert op basis van de roostergedreven simulaties.

3.3.1 Probleemdefinitie

Het huidige rooster bevat $n = 45$ oude lokaalaanduidingen. Het nieuwe gebouw heeft fysieke ruimtes met nieuwe labels. De vraag is welke oud-naar-nieuw mapping de congestie minimaliseert.

Constraints

1. **Gefixeerde lokalen:** Sommige ruimtes hebben een vanzelfsprekende mapping (gymzalen, praktijklokalen):

$$\text{sph1, sph2, sph3} \rightarrow 0.100$$

$$310, 002, 004, \dots \rightarrow \text{vaste nieuwe lokalen}$$

2. **Verdwijnend lokaal:** Door capaciteitsverschillen moet één oud lokaal niet worden gemapt ($\rightarrow \emptyset$). Het algoritme bepaalt welk lokaal dit optimaal is.
3. **Beschikbare pool:** Alleen nieuwe lokalen uit de originele mapping mogen worden gebruikt.

Dit resulteert in $n_{\text{flex}} = 30$ flexibele lokalen.

3.3.2 Implementatie

Datavergaring De roosterdata is per leerling geëxtraheerd uit Zermelo voor een representatieve normale week (geen excursies of verkorte dagen, wel reguliere lesuitval). Leerlingnummers zijn gehashed om privacy te waarborgen conform AVG-richtlijnen.

Initialisatie We starten met een *greedy warm-start*: uit 20 willekeurige toewijzingen wordt de beste als startpunt s_0 gekozen, wat typisch 50–100 SA-iteraties bespaart ten opzichte van een volledig willekeurige start.

Simulatiepipeline Voor elke kandidaat-toewijzing s :

1. Parseer roosterdata: extraheer alle lessen met tijdstip en oud lokaalnummer.
2. Map oude \rightarrow nieuwe lokalen via s .
3. Simuleer alle leerlingbewegingen via Dijkstra kortstepad op graaf G , met efficiënte caching van herhaalde oorsprong-bestemming-paren.
4. Tel edge-passages $\{n_e\}$ en bereken kostenfunctie $E(s)$ (Vergelijking 10).

Eén evaluatie kost ≈ 18 seconden op een standaard laptop (Intel i5, Python). De volledige optimalisatie van 500 iteraties duurt daarmee ≈ 2.5 uur.

SA-parameters

- Maximale iteraties: $N_{\text{max}} = 500$
- Starttemperatuur: $T_0 = 100$
- Afkoelsnelheid: $\alpha = 0.98$
- Swaps per iteratie: $k \sim \text{Uniform}(1, 3)$

3.3.3 Evaluatiemetrieken

We vergelijken de originele toewijzing s_{orig} met de geoptimaliseerde s_{opt} op vier metrieken:

1. **Standaarddeviatie edge loads:** $\sigma(\{n_e\})$
2. **Maximum edge load:** $\max_e n_e$
3. **Aantal bottlenecks:** $|\{e : n_e > \bar{n} + 2\sigma\}|$
4. **Gini-coëfficiënt** (Weisstein, z.d.):

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{|E|} (2i - |E| - 1) n_i}{|E| \sum_{i=1}^{|E|} n_i} \quad (13)$$

waarbij n_i de gesorteerde edge loads zijn. $G = 0$ betekent perfecte gelijkheid, $G = 1$ extreme ongelijkheid.

3.3.4 Validatie

Om te verifiëren dat SA niet in lokale minima blijft steken, voerden we 5 onafhankelijke runs uit met verschillende random seeds. De beste scores verschilden minder dan 3%, wat convergentie naar (bijna-)globale optima suggereert.

4 Resultaten

In dit hoofdstuk presenteren we de bevindingen van ons driedelig onderzoek: (1) de empirische karakterisering van leerlinggedrag via experimenten, enquêtes en videotracking, (2) de geometrische analyse van het gebouw op basis van de 3D-BIM-modellen en loopnetwerken, en (3) de optimalisatie van de lokaalindeling met behulp van Simulated Annealing.

Daarnaast worden in Sectie 4.2 aanvullende observaties uit ons locatiebezoek besproken. Samen bieden deze resultaten een compleet beeld van de verwachte mensenstromen in het nieuwe Mondial College gebouw.

4.1 Karakterisering van leerlinggedrag

De experimenten en video-opnames leveren een kwantitatieve en kwalitatieve basis voor het modelleren van loopgedrag. De volgende subsecties beschrijven de belangrijkste patronen, ondersteund door de uitgevoerde metingen. Deze empirische karakterisering vormt de kern van de parameters die later in de simulaties worden gebruikt.

4.1.1 Algemene looprichting en groepsgedrag

In rechte gangen blijkt dat leerlingen zich doorgaans automatisch verdelen: elke looprichting houdt een eigen kant aan, waardoor botsingen grotendeels worden voorkomen en de snelheid hoog blijft. Dit patroon komt duidelijk naar voren in meerdere opnames, waarbij de loopstromen zich na enkele seconden spontaan stabiliseren.

Wanneer iemand hiervan afwijkt en aan de “verkeerde” kant gaat lopen, ontstaan geen directe botsingen, maar wel kleine verstoringen in het ritme en in de gemiddelde snelheid. In bochten is de voorkeur voor de binnenbocht zeer uitgesproken: nagenoeg alle experimentreeksen tonen dat leerlingen de kortste route prefereren. Dit veroorzaakt een lokale verdichting aan de binnenzijde en een lagere snelheid op dat segment.

Daarnaast vertonen leerlingen sterk groepsgedrag: vriendengroepen bewegen als een eenheid en volgen vrijwel altijd de keuze van de “leider”. Dit verklaart waarom bij splitsingen snelle, collectieve richtingkeuzes ontstaan.

4.1.2 De invloed van obstakels en stilstaande leerlingen

Obstakels – zoals tafels, pilaren, of stilstaande groepjes – veroorzaken directe vertraging. Wanneer bijvoorbeeld een groepje in een bocht blijft staan, ontstaat menging van looprichtingen, wat in de experimenten tot sterke snelheidsdalingen leidt.

Vooral in T-splitsingen is dit effect uitgesproken. Indien leerlingen stil blijven staan op of nabij het kruispunt, valt de doorstroming vrijwel volledig stil. Zonder dergelijke obstakels verlopen dezelfde T-splitsingen juist opmerkelijk soepel: de ruimte wordt dan vanzelf verdeeld over de

beschikbare richtingen en de looprichting blijft duidelijk gescheiden.

Dit effect heeft een grote invloed op de doorstroom in een schoolgebouw. Dit omdat klassen vaak voor de deur moeten wachten tot de docent er is om de deur te openen. Deze wachtende klassen verslechteren de doorstroom, blijkt uit onze experimenten, enorm.

4.1.3 Deuren als knelpunten

Deursituaties vormen een bijzonder knelpunt. Uit de opnames blijkt dat gedrag sterk varieert: sommige leerlingen wachten automatisch op elkaar, terwijl anderen zich ertussen duwen. Vriendengroepen bewegen bijna altijd als cluster door een deur; zodra de eerste doorgaat, volgt de rest zonder verdere afstemming. Dit leidt vaak tot asymmetrische doorstroom.

Wanneer leerlingen echter om-en-om door een deur gaan, blijft de snelheid hoog en ontstaan nauwelijks opstoppingen. Een opvallende observatie is dat wanneer twee leerlingen fysiek tegelijk door een deur passen, ze dat vrijwel altijd proberen – ook als dit in theorie trager is voor de totale groep.

4.1.4 Het effect van telefoongebruik

Telefonerende of appende leerlingen lopen trager en reageren minder snel op hun omgeving. Dit leidt in bochten of drukke segmenten tot verhoogde kans op botsingen of abrupte stops.

Ook blijkt dat telefoongebruik de persoonlijke ruimte verkleint: deze leerlingen letten minder op afstand, waardoor anderen hen minder goed kunnen inschatten. Rugzakken hebben juist het omgekeerde effect. Ze vergroten de benodigde persoonlijke ruimte en leiden tot extra vertraging in smalle segmenten.

4.1.5 Enquêteresultaten

Uit de enquête blijkt dat leerlingen de drukte tijdens leswisselingen en pauzes als grootste knelpunt ervaren. Veel leerlingen rapporteren traagheid op trappen en in gangen, waarbij vooral het gelijktijdig wisselen van lessen wordt genoemd als oorzaak van opstoppingen.

Daarnaast worden obstakels en stilstaan op drukke plekken genoemd als hinderlijk. Opvallend is dat veel leerlingen aangeven dat ongeschreven regels zoals “rechts houden” vaak worden genegeerd, wat de doorstroming vermindert.

Leerlingen noemen verschillende mogelijke oplossingen: bredere gangen, gespreide lestijden, minder deuren, het verplaatsen van docenten in plaats van leerlingen, en het verwijderen van obstakels uit looproutes. Deze inzichten ondersteunen de noodzaak van een ontwerp dat piekdrukke minimaliseert.

4.2 Aanvullende observaties locatiebezoek

Tijdens het locatiebezoek zijn aanvullende kwalitatieve observaties gedaan die niet direct uit de experimenten voortkomen, maar wel waardevol zijn voor het interpreteren van de resultaten en het ontwerpen van oplossingen.

4.2.1 Algemene indruk van loopstromen

Hoewel het gebouw ruim oogt, blijken bepaalde segmenten – zoals de hal, de trapportalen en diverse T-splitsingen – praktisch smal door obstakels, hoekpunten of gelijktijdige stromen. De visuele waarnemingen bevestigen dat de hal een natuurlijke “verzamelruimte” is, wat later in Figuur 8 en 9 ook kwantitatief zichtbaar wordt als het drukste deel van het netwerk.

4.2.2 Trappen als knelpunt

Het meest opvallende resultaat van ons locatiebezoek zijn de trappen als knelpunten. Deze zijn een stuk smaller dan op de huidige locatie Leuvensbroek (figuur 4), wat voor een vertraagde doorstroom zal zorgen. Hoewel het nieuwe gebouw meer trappenhuizen heeft (5 i.p.v. 4), zijn de voetgangersstromen – zoals we later zullen laten zien – minder goed verdeeld over deze trappenhuizen in de nieuwe locatie. Ook heeft de oude locatie dubbel het aantal verdiepingen (4), waardoor er in werkelijkheid $4 \times 4 = 16$ trappen zijn, in tegenstelling tot 5 in de nieuwe locatie. Het zal dus significant drukker worden in de kleinere trappenhuizen.

Daarnaast is er een trap die specifiek onze aandacht trok (figuur 5). Deze trap, die uitkomt in de hal, heeft een trechtersvorm; iets wat in het ontwerpen van gebouwen absoluut voorkomen moet worden. Hoewel er beneden makkelijk 5 mensen naast kunnen lopen, wordt deze breedte snel gereduceerd tot 1 meter, waar net twee mensen elkaar kunnen passeren. De centrale ligging van deze trap, bij de hal en de aula, maakt het de meest logische trap om naar de eerste verdieping te gaan, maar versterkt het problematische karakter.



Figuur 4. Trappenhuis

4.3 Gedragsobservaties

4.3.1 Vrije loopsnelheid

Naast de gedragsobservaties is ook de *intrinsieke loopsnelheid* van leerlingen gemeten – dat wil zeggen: de snelheid waarmee leerlingen lopen wanneer zij niet worden beïnvloed door obstakels, groepsvorming, tegenliggers of andere beperkingen. Deze vrije loopsnelheid vormt een noodzakelijke basisparameter voor het simulatiemodel, omdat zij

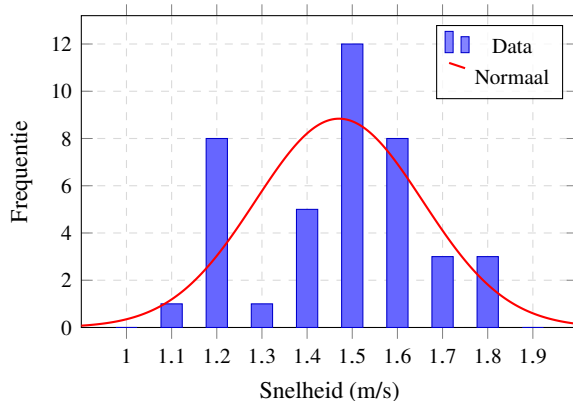


Figuur 5. Trechter-vormige trap

bepaalt welke snelheid leerlingen *would* aanhouden bij afwezigheid van congestie. Alle vertragingen die later in het model worden gesimuleerd (zoals opstoppingen, bochten of deurpassages) moeten worden geïnterpreteerd ten opzichte van deze natuurlijke snelheid.

Voor deze meting werd een deel van de gymzaal vrijgemaakt als rechte looplijn. Leerlingen liepen individueel in hun eigen tempo van punt A naar punt B, zonder tijdsdruk of andere leerlingen in de buurt. De beweging van elke leerling werd gevolgd met dezelfde trackingmethode als in de overige experimenten (zie Methoden). In totaal leverde dit $N = 41$ onafhankelijke metingen op.

Figuur 6 toont de frequentieverdeling van deze vrije loop-snelheden, met ter vergelijking een normaalverdelingsfit.



Figuur 6. Vrije loopsnelheden gemeten uit videobeelden ($N = 41$). De rode curve toont een normaalverdeling met gemiddelde $\mu = 1.471$ m/s en standaardafwijking $\sigma = 0.1851$.

De resultaten laten een relatief smalle spreiding zien: de meeste leerlingen lopen tussen 1.3 en 1.7 m/s, met een duidelijk maximum rond 1.5 m/s. Deze waarde is consistent met bekende referenties voor de vrije loopsnelheid van jongeren in een open omgeving. Daarnaast toont de verdeling weinig uitschieters, wat erop duidt dat vrije loopsnelheid onder leerlingen redelijk uniform is.

Deze vrije snelheid fungeert in het vervolg van het onderzoek als *baseline*. Alle snelheidsdalingen in andere experimenten (zoals bij bochten, obstakels en deurpassages)

worden daardoor interpreteerbaar als relatieve vertraging ten opzichte van deze natuurlijke loopsnelheid. Dit maakt het mogelijk om later in het simulatiemodel realistische reistijden en congestiepatronen te genereren.

4.3.2 Opstopping voor lokalen

Een van de belangrijkste oorzaken van grote opstoppingen in de wandelgangen tijdens leswisselingen, zijn klassen die voor de deur van een lokaal hun docent aan het opwachten zijn. Hoewel de meest logische oplossing hiervoor het verbreden van gangen is, zien we dat dit ook niet altijd het gewenste effect heeft. Leerlingen gedragen zich wanneer ze wachten graag als een gas: ze vullen de gehele beschikbare ruimte.

Toch kan het feit dat in de vleugel links onder op de plattegrond de gangen smaller zijn dan op de huidige locatie alsnog problematisch zijn. De ingangen naar lokalen staan daar, aan beide kanten, dicht op elkaar. Hierdoor zal deze gang snel geblokkeerd worden door wachtende gangen. Zoals eerder gezegd zal het verbreden van deze gang geen significant effect hebben, de grootste winst is te behalen door het tijdig openen van deze lokalen, zelfs als de docent nog niet aanwezig is.

Hoe de opstopping door wachtende leerlingen te verminderen is door *nudging*, is een onderwerp voor vervolgonderzoek. Dit zou er bijvoorbeeld uit kunnen zien als het plaatsen van bankjes, of het maken van lijnen op de vloer, om de positie van de leerlingen in de gang te sturen.

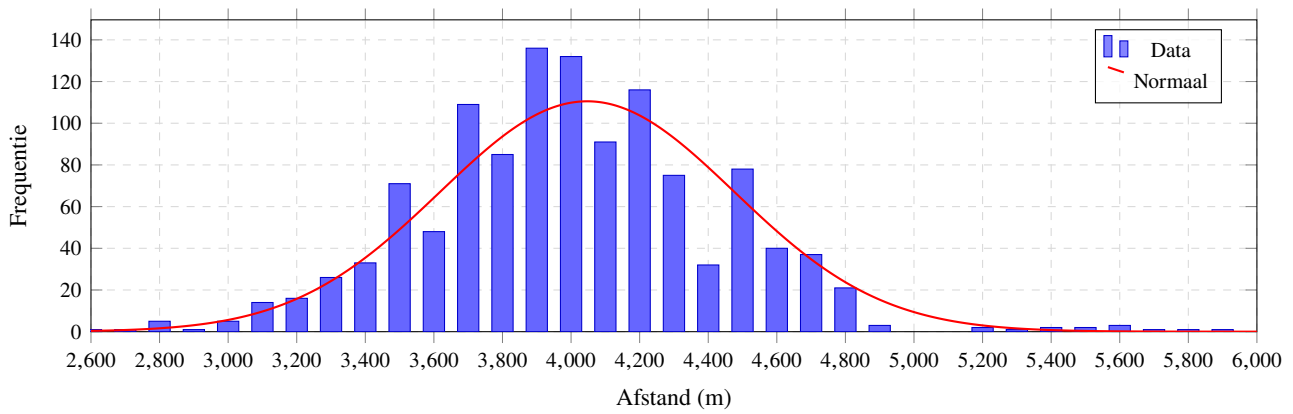
4.4 Geometrische analyse

Tabel 2 toont de karakteristieken van de oorspronkelijke lokaalindeling s_{orig} , zoals voorgesteld door de facilitair manager.

Tabel 2. Edge belasting statistieken voor originele lokaalindeling. Cijfers zijn per dag gemiddeld.

Metriek	Waarde
Gemiddelde edge belasting \bar{n}	986 passages
Standaarddeviatie σ	1262 passages
Maximum edge belasting	6513 passages
Minimum edge belasting	13 passages
Aantal bottlenecks ($> \mu + 2\sigma$)	18 edges
Gini-coëfficiënt	0.5848

Uit de data blijkt aanzienlijke ongelijkheid: de meest belaste edge (bij de hal) heeft $6.6\times$ de gemiddelde belasting. Dit geeft aan dat een beperkt deel van het netwerk verantwoordelijk is voor een groot deel van de totale doorstroom.



Figuur 7. Histogram van totale gelopen afstand per leerling per week ($N = 1189$), met normale verdeling. Gemiddelde $\mu = 4047.13$, standaardafwijking $\sigma = 429.25$. Binbreedte = 100 m.



Figuur 8. Kans op het passeren van een edge op de begane grond, uitvergroot in figuur 14.



Figuur 9. Kans op het passeren van een edge op de eerste verdieping, uitvergroot in figuur 15.

Figuur 8 en 9 visualiseren deze ongelijkheid. De hal heeft een doorgangskans van 61.99% voor een willekeurige verplaatsing, wat de centrale rol en de kwetsbaarheid van deze ruimte benadrukt.

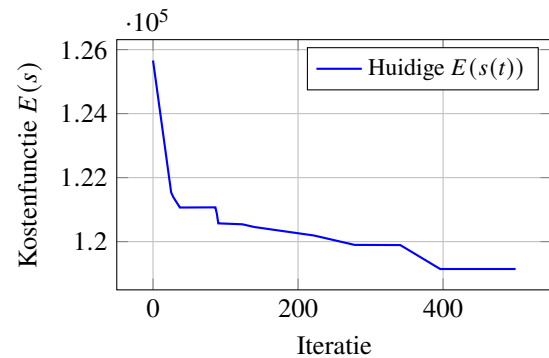
Deze resultaten bevestigen dat de huidige configuratie van het gebouw leidt tot concentratie van stromen en dat optimalisatie potentieel waardevol kan zijn.

4.5 Lokaalindeling optimalisatie

4.5.1 Optimalisatie convergentie

Om te onderzoeken of de lokaalindeling geoptimaliseerd kan worden, is een Simulated Annealing (SA) algoritme

toegepast. De originele layout kreeg een score van 132675. Figuur 10 toont de convergentie van het algoritme over 500 iteraties.



Figuur 10. Convergentie van Simulated Annealing optimalisatie. De curve toont de daling van de kostenfunctie, waarbij na ~400 iteraties stabilisatie optreedt. Beste gevonden score: 119144, een verbetering van 10.2% ten opzichte van de originele layout (132675).

Het algoritme bereikte een beste score van 119144, wat een reductie van 10.2% betekent ten opzichte van de originele indeling. Na ongeveer 400 iteraties vlakt de curve af, wat wijst op stabilisatie van de oplossing.

4.5.2 Vergelijkende analyse

Tabel 3 vergelijkt de kwantitatieve metrieken tussen de originele en geoptimaliseerde lokaalindeling.

De data in Tabel 3 laat bescheiden verbeteringen zien. De standaarddeviatie van de edge load daalt met 4.6%, wat duidt op een iets gelijkmatigere verdeling van leerlingstromen. Ook de maximum edge load daalt met 6.4%, en het aantal bottlenecks neemt af van 18 naar 14 edges. De Gini-coëfficiënt, een maat voor ongelijkheid in de verdeling, verbetert met 3.0%.

Opvallend is dat de gemiddelde edge load vrijwel gelijk blijft (-0.3%), wat logisch is: het totale aantal leerlingbewegingen verandert immers niet door herschikking van lokalen. De optimalisatie zorgt vooral voor een herverdeling van de belasting, niet voor een reductie van het totale aantal verplaatsingen.

Tabel 3. Vergelijking tussen originele en geoptimaliseerde lokaalindeling.

Metriek	Origineel	Geoptimaliseerd	Vershil
Gemiddelde edge load	4880.96	4868.07	-0.3%
Standaarddeviatie σ	6145.52	5864.99	-4.6%
Maximum edge load	29825.00	27926.00	-6.4%
Minimum edge load	4.00	7.00	+75.0%
Range (max – min)	29821.00	27919.00	-6.4%
Aantal bottlenecks	18	14	-4 edges
Gini-coëfficiënt	0.5848	0.5675	-3.0%

4.5.3 Geoptimaliseerde toewijzingen

Bij herhaaldelijk uitvoeren van de simulatie kwamen vergelijkbare scores naar voren, maar was de specifieke layout telkens verschillend. Er is dus geen enkele “optimale” lokaalindeling te identificeren. Dit komt doordat de meeste lokalen een gelijke bezetting hebben en er geen structurele patronen zijn in welke lessen elkaar opvolgen. Lokalen met afwijkende eigenschappen, zoals de studieruimte, kunnen bovendien niet vrijelijk van positie wisselen.

Wel is een algemeen patroon waarneembaar: in de beste layouts bevinden lokalen voor hetzelfde vak zich doorgaans niet naast elkaar. De verklaring hiervoor is dat wanneer een leerling bijvoorbeeld wiskunde heeft in een wiskundelokaal, deze het volgende lesuur zelden naar een aangrenzend wiskundelokaal hoeft. Door diversiteit aan te brengen in de vakken die in naburige lokalen worden gegeven, kan de gemiddelde loopafstand dus enigszins worden verkleind.

4.5.4 Praktische overwegingen

Hoewel de optimalisatie statistisch significante verbeteringen laat zien in Tabel 3, zijn de effecten beperkt in omvang. De vraag is of een herindeling praktisch haalbaar en wenselijk is, gezien de bescheiden verbeteringen van 3–7% op de relevante metrieken.

Een belangrijk nadeel is dat wanneer vaklokalen geografisch worden verspreid, docenten die hetzelfde vak geven verder moeten lopen tussen hun lessen. Dit kan leiden tot langere wachttijden voor leerlingen voor de deur, wat—zoals eerder besproken—ongewenst is en mogelijke veiligheidsrisico's met zich meebrengt. Deze trade-off tussen gelijkmatigere leerlingstromen en efficiëntie voor docenten moet zorgvuldig worden afgewogen.

Bovendien suggereert de afwezigheid van een unieke optimale layout dat kleine aanpassingen in de lokaalindeling geen structurele oplossing bieden voor drukte op de gangen. De verbeteringen zijn incrementeel en het is twijfelachtig of zij opwegen tegen de organisatorische complexiteit en potentiële nadelen van een grootschalige herindeling.

4.6 Interviews

Om onze bevindingen in context te plaatsen, hebben wij met verschillende mensen binnen de school interviews afgenomen. De volledige uitwerking hiervan is te vinden in appendix B. Uit de interviews met de roostermaker, docenten en leerlingen komt een consistent beeld naar voren van de belangrijkste knelpunten en kansen binnen de huidige schoolorganisatie. Alle respondentgroepen ervaren de leswisselingen als een belangrijk moment van onrust

en drukte, maar verschillen in hun visie op mogelijke oplossingen.

De roostermaker benadrukt dat het roosterproces sterk wordt begrensd door logistieke, personele en wettelijke randvoorwaarden. Grote structurele veranderingen, zoals vaste lokalen per klas of clustering per vleugel, blijken in de praktijk moeilijk uitvoerbaar. Wel wordt erkend dat aanpassingen mogelijk zijn wanneer deze passen binnen de bestaande systemen van eisen en wensen.

Docenten wijzen unaniem het idee van vaste lokalen voor leerlingen af. Zij ervaren dat dit leidt tot territoriumgedrag, verminderde orde en pedagogische spanningen. Tegelijkertijd zien zij duidelijke voordelen in het hebben van vaste lokalen voor docenten, vooral vanwege een lagere werkdruk en betere organisatorische rust. Daarnaast spreken docenten een duidelijke voorkeur uit voor langere lessen van ongeveer zestig minuten, vanwege didactische voordelen en een vermindering van het aantal wisselmomenten.

Leerlingen tonen een meer gedifferentieerd beeld. Jongere leerlingen staan positiever tegenover een vast lokaal, terwijl oudere leerlingen meer waarde hechten aan beweging en afwisseling. Een breed gedeelte zorg onder alle leerlingen is de wens om niet langer op school te hoeven blijven. Extra wisseltijd wordt alleen acceptabel gevonden wanneer dit niet leidt tot een langere schooldag.

De meest consistente en breed gedragen bevinding is dat langere lessen (circa 60 minuten) door vrijwel alle respondentengroepen worden gezien als een realistische en wenselijke maatregel. Deze wordt gezien als een effectieve manier om de drukte in de gangen te verminderen, zonder grote organisatorische of pedagogische nadelen te introduceren. Deze uitkomst vormt daarmee een centraal aanknopingspunt voor verdere beleidsafwegingen.

5 Conclusie

Dit onderzoek had als doel de verwachte mensenstromen in het nieuwe schoolgebouw van het Mondial College inzichtelijk te maken en concrete maatregelen te identificeren. Uitgaande van de centrale vraag — *in hoeverre biedt een combinatie van empirische gedragskarakterisering, grafiethoortheoretische modellering en algoritme-gestuurde optimalisatie inzicht in verwachte mensenstromen, en welke maatregelen reduceren structurele congestie aantoonbaar?* — concluderen we dat de hybride aanpak een effectief instrument biedt voor pre-occupancy analyse, maar ook laat zien dat doorstroomproblemen primair topologisch van aard zijn en slechts beperkt beïnvloedbaar via lokaalindeling.

5.1 Beantwoording deelvragen en kernbevindingen

5.1.1 Deelvraag 1 (Modelkeuze):

De literatuurstudie, aangevuld met een eigen implementatie van het Social Force Model, toont aan dat voor whole-building analyse van een rooster-gedreven schoolomgeving een grafentheoretische benadering optimaal is: computationeel efficiënt ($O(N \log |V|)$) en direct koppelbaar aan lesroosterdata. Het SFM reproduceert lokaal realistische gedragspatronen maar is op gebouwschaal ($N \approx 1200$) praktisch onuitvoerbaar. Macroscopische vloeistofmodellen bieden nuttige bovengrenzen voor gangcapaciteiten maar falen als routeringsmodel door de smalle gangen en heterogene bestemmingen.

5.1.2 Deelvraag 2 (Geometrische analyse):

De geometrische analyse van het nieuwe gebouw onthult een sterke ongelijkheid in belasting (Gini-coëfficiënt = 0.585): de centrale hal heeft een doorgangskans van 61.99%, waardoor deze ruimte het kritieke knooppunt van het gebouw vormt. De botstructuur van het gebouw — twee vleugels verbonden via één centrale hal — is de primaire oorzaak van deze concentratie; geen lokaalindeling kan dit fundamentele ontwerpkenmerk wijzigen. Daarnaast zijn de trappenhuizen in het nieuwe gebouw smaller dan op de huidige locatie, terwijl de stromen er minder goed over verdeeld zijn.

5.1.3 Deelvraag 3 (Empirische karakterisering):

De experimenten bevestigen drie primaire gedragspatronen. Ten eerste is er sterke groepscohesie: vriendengroepen bewegen als sociale eenheden, reduceren de effectieve gangcapaciteit en volgen collectief de keuze van de groepsleider. Ten tweede is er routinematig kuddegedrag, zoals een uitgesproken voorkeur voor de binnenbocht, dat leidt tot lokale verdichting. Ten derde veroorzaakt smartphonegebruik een meetbare snelheidsreductie en verhoogde kans op abrupte stops. Daarnaast bleek dat wachtende klassen voor gesloten lokalen de doorstroom sterk verslechteren — een factor die niet uit geometrie alleen voorspelbaar is. De vrije loopsnelheid werd empirisch vastgesteld op $\mu = 1.47$ m/s ($\sigma = 0.19$ m/s), consistent met internationale literatuurwaarden.

5.1.4 Deelvraag 4 (SA-optimalisatie):

Simulated Annealing-optimalisatie van de lokaalindeling leidt tot bescheiden maar statistisch aantoonbare verbeteringen: de standaarddeviatie van de gangbelasting daalt met 4.6%, de maximum gangbelasting met 6.4%, het aantal bottlenecks van 18 naar 14 edges, en de Gini-coëfficiënt van 0.585 naar 0.568 (−3.0%). Er is geen unieke optimale indeling: meerdere runs met verschillende startpunten convergeren naar vergelijkbare scores maar verschillende configuraties. Het algemene patroon is dat lokalen voor hetzelfde vak beter niet naast elkaar worden geplaatst. De beperkte omvang van de verbeteringen laat zien dat lokaalindeling geen structurele oplossing biedt voor congestie die primair topologisch bepaald is.

5.1.5 Deelvraag 5 (Maatregelen):

De analyse wijst op drie categorieën van effectieve maatregelen. Ten eerste architectonische fine-tuning: gerichte aandacht voor de centrale hal en kritieke deurpassages, waar relatief eenvoudige aanpassingen het meeste effect sorteren. Ten tweede organisatorische maatregelen: gespreide leswisseltijden en het tijdig openen van lokalen (ook zonder aanwezige docent) reduceren de piekbelasting op gangen direct. Ten derde gedragssturing via nudging: bewegwijzering en vloermarkeringen kunnen leerlingen sturen naar minder belaste routes, met name naar de eerste verdieping als alternatieve doorgaande route. Interviews met docenten, leerlingen en de roostermaker bevestigen dat langere lessen van circa 60 minuten de meest breed gedragen en praktisch haalbare maatregel zijn om het aantal wisselmomenten te verminderen.

5.2 Vergelijking met het huidige gebouw

Het nieuwe gebouw verschilt fundamenteel van de huidige locatie Leuvenbroek. Waar het oude gebouw compacter is met kortere maar minder overzichtelijke routes, kent het nieuwe ontwerp langere maar helderder gedefinieerde looppaden. De botvorm van het nieuwe gebouw, met twee vleugels verbonden via een centrale hal, creëert echter een structureel knelpunt: vrijwel alle verplaatsingen tussen verdiepingen of vleugels passeren deze hal. Hoewel de hal zelf ruim is, zijn de toegangsdeuren even smal als elders in het gebouw (~2–3 m), waardoor de theoretische capaciteit van de hal niet benut kan worden. Dit asymmetrische ontwerp – breed centraal knooppunt met smalle toegangen – vormt het grootste verschil met het huidige gebouw en verklaart de extreme doorgangskans van 62%.

Een belangrijke aanbeveling is daarom dat leerlingen, waar mogelijk, via de bovenverdieping lopen in plaats van door de begane grond. De eerste verdieping heeft vergelijkbare connectiviteit maar significant lagere voorspelde belasting, waardoor deze routes als natuurlijke bypass kunnen functioneren tijdens piekdrukke.

5.3 Praktische implicaties

Voor het Mondial College biedt dit onderzoek een proactief beslissingsondersteunend kader in de pre-occupancy fase. De belangrijkste conclusie is dat de grootste winst in doorstroming en veiligheid niet ligt in complexe fysieke herinrichtingen, maar in een combinatie van:

1. **Architectonische fine-tuning:** Specifieke aandacht voor de centrale hal en kritieke deurpassages, waar relatief eenvoudige aanpassingen (betere doorstroomrichting, ruimtelijke inrichting, verbreding van toegangsdeuren) het meeste effect sorteren.
2. **Organisatorische optimalisatie:** Gespreide leswisseltijden en actief invoeren van gedragssturing (“rechts aanhouden”) zijn directe interventies die voortkomen uit modeluitkomsten en leerling-ervaringen.
3. **Routebewustzijn:** Stimuleren van gebruik van de bovenverdieping als alternatieve route reduceert druk op de begane grond.

Hiermee verschuift de focus van reactief probleemoplossen naar proactief en preventief ontwerp, met als doel een

veiligere en efficiëntere schoolomgeving vanaf de eerste schooldag in het nieuwe gebouw.

6 Discussie

6.1 Methodologische reflectie en beperkingen

6.1.1 Keuze voor hybride modelbenadering

De keuze voor een grafentheoretische primaire benadering, aangevuld met empirische kalibratie en macroscopische validatie, verdient expliciete verantwoording. Bestaande crowd dynamics modellen – macroscopische vloeistofmodellen, microscopische Social Force Models, en grafentheoretische benaderingen – hebben elk specifieke toepassingsdomeinen. Voor schoolgebouwen gold een unieke combinatie van eisen: (1) grote aantallen agenten ($N \approx 1200$), (2) deterministisch rooster-gedreven beweging, en (3) beperkte computationele resources voor praktische toepassing.

Macroscopische modellen falen bij de discrete aard van schoolgangen ($w \approx 2\text{--}4$ m betekent slechts 4–7 personen naast elkaar bij optimale dichtheid). Volledige microscopische simulatie met Social Force Model zou $O(N^2)$ kosten per tijdstap vereisen, wat prohibitief is voor whole-building analyse over een volledige schoolweek. De grafenbenadering biedt $O(N \log V)$ complexiteit en natuurlijke integratie met roosterdata, waardoor realistische simulaties binnen 18 seconden per scenario mogelijk zijn.

Deze pragmatische keuze impliceert echter beperkingen: het model benadert interacties via statische capaciteitsgrenzen en kortste-pad routing, zonder volledige dynamische fysieke interacties. Hierdoor worden emergente fenomenen zoals *stop-and-go*-golven of spontane lane-formatie minder gedetailleerd voorspeld. Voor de primaire onderzoeksdoelen – identificatie van structurele knelpunten en evaluatie van lokaalindelingen – is deze trade-off acceptabel, maar voor gedetailleerde evacuatieanalyse zou een microscopisch model waardevol zijn.

6.1.2 Validiteit empirische karakterisering

De empirische experimenten werden uitgevoerd in een gecontroleerde gymzaalomgeving met vrijwillige deelnemers die zich bewust waren van observatie. Dit roept vragen op over ecologische validiteit: vertoont leerlinggedrag in een experimentele setting hetzelfde karakter als in dagelijkse schoolsituaties?

Drie factoren suggereren dat de gemeten parameters representatief zijn. Ten eerste bleken leerlingen na korte gewinning hun natuurlijke gedrag te hervatten: groepsformatie, smartphone-gebruik en routekeuze vertoonden patronen die overeenkomen met informele observaties. Ten tweede liggen de gemeten vrije loopsnelheden ($\mu = 1.47$ m/s, $\sigma = 0.19$ m/s) binnen de range gerapporteerd in internationale literatuur voor adolescenten (Corbetta & Toschi, 2023). Ten derde bevestigen enquête-resultaten dat leerlingen zelf de geobserveerde fenomenen (groepscohesie, binnenbocht-voorkeur, telefoonvertraging) herkennen als representatief.

Desondanks blijft het mogelijk dat subtiele contextuele factoren – zoals tijdsdruk voor de volgende les, aanwezigheid van toezichthouders, of sociale dynamiek specifiek

voor leswisselingen – niet volledig gevangen zijn. Post-occupancy validatie met tracking-data uit het daadwerkelijke gebouw zou deze onzekerheid kunnen reduceren en het model verder kunnen kalibreren.

6.1.3 Methodologische bijdrage: ontwikkelde software

Naast de inhoudelijke resultaten levert dit onderzoek een methodologische bijdrage aan het veld van crowd dynamics in onderwijsomgevingen. We ontwikkelden eigen software voor drie kritieke componenten:

1. **BIM-naar-graaf conversie:** Extractie van topologische netwerken uit architecturale plattegronden, resulterend in een gewogen graaf van 388 vertices en 427 edges met gevalideerde afstands- en capaciteitsattributen.
2. **Video tracking pipeline:** Semi-automatische trajectextractie uit overhead camera-opnames via bewegingdetectie en interpolatie, waarbij handmatige correctie de nauwkeurigheid garandeert die volledige automatisering niet bood.
3. **Rooster-gedreven simulator:** Integratie van Zermeloroosterdata met grafentheoretische routing, waardoor realistische simulatie van >1000 individuele leerlingbewegingen per dag mogelijk is binnen beperkte rekentijd. De simulator implementeert Dijkstra's algoritme met efficient caching van kortste-pad berekeningen.

Deze tools zijn modulair opgezet en direct toepasbaar op andere schoolgebouwen of vergelijkbare gestructureerde omgevingen (ziekenhuizen, kantoorgebouwen, universiteitscampussen). De broncode en methodologie bieden een blauwdruk voor toekomstig onderzoek naar crowd dynamics in rooster-gedreven contexten – een onderbelicht domein in de bestaande literatuur die zich voornamelijk richt op stations, stadions en festivals.

6.2 Lokaalindeling optimalisatie: diepgaande analyse

6.2.1 Validiteit van Simulated Annealing keuze

De keuze voor SA boven alternatieve methoden verdient toelichting:

Versus exacte methoden Integer Linear Programming (ILP) zou een gegarandeerd globaal optimum leveren, maar de $O(n!)$ complexiteit maakt dit praktisch onhaalbaar voor $n > 20$. Ons probleem ($n = 30$ flexibele lokalen) zou dagen tot weken rekentijd vergen zonder garantie op convergentie binnen acceptabele tijd.

Versus genetische algoritmes GA's werden getest in pilot studies maar leverden geen betere resultaten dan SA bij gelijke rekentijd. De kruisingsoperator (recombining twee toewijzingen) creëerde vaak invalide oplossingen die reparatie nodig hadden, wat de effectiviteit verminderde. Daarnaast vereisen GA's tuning van populatiegrootte, mutatie en selectiedruk – extra hyperparameters die SA niet heeft.

Versus greedy methoden Pure greedy optimalisatie (altijd de beste swap accepteren) bleef consistent in lokale minima steken met 15–20% slechtere scores dan SA. Dit bevestigt het belang van de Metropolis-criterium in SA, die tijdelijke verslechtingen toestaat om uit lokale minima te ontsnappen.

6.2.2 Gevoeligheidsanalyse

We voerden systematische parameter sweeps uit om de robuustheid te testen:

- **Temperatuurschema:** $\alpha \in [0.90, 0.99]$ gaf vergelijkbare eindscores (variatie < 5%); $\alpha < 0.90$ convergeerde te snel naar suboptimale oplossingen, $\alpha > 0.99$ vereiste prohibitief veel iteraties zonder verdere verbetering.
- **Penalty gewicht λ :** Variatie tussen 5–20 had minimale impact (< 2% score verschil), wat suggereert dat de kostenfunctie robuust is tegen deze hyperparameter.
- **Aantal swaps per iteratie:** Meer dan 3 swaps verhoogde ruis zonder verbetering; minder dan 2 swaps vertraagde convergentie. De optimale waarde van 1–3 random swaps balanceert exploratie en exploitatie.
- **Multiple runs:** Vijf onafhankelijke runs met verschillende random seeds convergeerden naar oplossingen binnen 3% van elkaar, wat suggereert dat SA consistent (bijna-)globale optima vindt in dit probleemlandschap.

6.2.3 Aannames en beperkingen

Statisch rooster We assumeren dat het rooster gefixeerd is. In werkelijkheid kan het rooster ook aangepast worden (bijv. specifieke vakken clusteren in tijd), wat een extra optimalisatie-dimensie toevoegt. Joint optimalisatie van rooster én lokaalindeling zou theoretisch betere resultaten kunnen opleveren, maar de complexiteit neemt exponentieel toe en de praktische haalbaarheid is twijfelachtig gezien organisatorische constraints (beschikbaarheid docenten, spreiding vakken over de week).

Uniform leerlinggedrag Het model negeert dat sommige routes preferent gekozen worden ondanks langere afstand (bijv. langs kantine voor sociale interactie, of vermijden van bepaalde gangen). Dit zou via *stated preference surveys* of revealed preference analyse van WiFi-tracking data gekwantificeerd kunnen worden. Echter, voor nieuwbouwscenarië's zijn dergelijke voorkeuren nog niet gevormd, wat de relevantie van deze beperking reduceert.

Deterministisch model We gebruiken gemiddelde looptijden; variabiliteit door groepsformatie of afleiding wordt niet meegenomen in de optimalisatie-kostenfunctie (wel in aparte simulaties voor validatie). Een stochastisch model zou robuustere oplossingen kunnen identificeren die goed presteren onder verschillende realisaties van leerlinggedrag, maar zou significant meer evaluaties per kandidaatoplossing vereisen.

6.2.4 Praktische implementeerbaarheid en two-stage benadering

Een belangrijk vraagstuk is of de geoptimaliseerde indeling *praktisch realiseerbaar* is. Overleg met de facilitair manager onthulde constraints die niet in het initiële model zaten:

- Bepaalde vakken vereisen specifieke faciliteiten (bijv. scheikunde lokalen met afzuiging en watertoegang, natuurkunde lokalen met demonstratietafels)
- Sommige docenten delen een vast lokaal en moeten daarom geografisch gegroepeerd zijn
- Geluidsisolatie-eisen (muziek/drama moet niet naast lokalen voor toetsafname; bewegingsonderwijs mag niet naast theorielokalen)
- Pedagogische clustering (vreemde talen bij elkaar voor interdisciplinaire projecten)

Deze constraints zijn deels hard (technische faciliteiten) en deels soft (pedagogische wensen). Dit suggereert een *two-stage benadering*:

1. **Stage 1 – Constraint satisfaction:** Hard constraints (faciliteiten, geluid) worden manueel/regelgebaseerd gefixeerd door domeinexperts (facilitair manager, onderwijscoördinator)
2. **Stage 2 – Optimalisatie:** SA optimaliseert de overige flexibele lokalen binnen deze constraints, met soft constraints als penalty-termen in de kostenfunctie

Deze hybride aanpak combineert domeinkennis met algoritmische optimalisatie. In praktijk zou implementatie iteratief verlopen: na elke SA-run evalueert de facilitair manager of de oplossing voldoet aan impliciete organisatorische eisen, waarna eventueel nieuwe constraints worden toegevoegd en het proces herhaald.

6.2.5 Interpretatie van bescheiden verbeteringen

De optimalisatie levert statistisch significante maar bescheiden verbeteringen (Gini-reductie 3%, max edge load daling 6.4%, 4 minder bottlenecks). Drie factoren verklaren waarom drastische verbeteringen niet haalbaar zijn:

1. **Intrinsieke topologische beperkingen:** De botvorm van het gebouw forceert structureel dat vrijwel alle routes door de centrale hal gaan. Geen lokaalindeling kan dit fundamentele ontwerpkenmerk wijzigen – alleen herbouw zou dit adresseren.
2. **Rooster-gedreven uniformiteit:** Het rooster is al redelijk gebalanceerd ontworpen (elk lokaal heeft vergelijkbare bezetting). Er zijn geen systematische patronen zoals “alle wiskundelessen in de ochtend” die via herindeling geëxploiteerd kunnen worden.
3. **Beperkte flexibiliteit:** Slechts 30 van de 51 lokalen zijn flexibel; de rest heeft vaste functie. Dit reduceert de oplossingsruimte drastisch.

De conclusie is niet dat optimalisatie zinloos is, maar dat *lokaalindeling geen wondermiddel is*. De 3–7% verbeteringen zijn welkom maar niet transformatief. Dit onderstreept des te meer de noodzaak van organisatorische interventies (gespreide leswisseltijden, gedragsregels) die niet gebonden zijn aan fysieke constraints.

6.3 Implicaties voor onderwijsontwerp

6.3.1 Van reactief naar proactief gebouwbeheer

Dit onderzoek demonstreert de waarde van pre-occupancy analyse. Traditioneel worden gebouwproblemen pas zichtbaar na ingebruikname, waarna correcties duur en disruptief zijn (fysieke aanpassingen vereisen sluiting van delen van het gebouw). Door simulaties vooraf uit te voeren kan het Mondial College:

1. **Geïnformeerde beslissingen nemen:** De data over halbelasting (62% doorgang) en deurknelpunten leidt tot concrete aanbevelingen (deurverbreding, bewegwijzering) die nu nog tegen relatief lage kosten geïmplementeerd kunnen worden.
2. **Organisatorische maatregelen voorbereiden:** Gespreide leswisseltijden en gedragsregels (“rechts aanhouden”) kunnen vanaf dag één geïntroduceerd worden, met uitleg aan leerlingen waarom deze regels nodig zijn (gesteund door visualisaties uit dit onderzoek).
3. **Monitoring faciliteren:** Het model kan als baseline dienen voor post-occupancy evaluatie. Afwijkingen tussen voorspelling en realiteit zijn informatief en helpen het model te kalibreren voor toekomstig gebruik.

Deze verschuiving van reactief naar proactief is vooral relevant gezien de schaal van moderne onderwijsgebouwen en de veiligheidsrisico's van slechte doorstroming.

6.3.2 Generalisatie naar andere onderwijsomgevingen

Hoewel dit onderzoek specifiek gericht is op het Mondial College, zijn de methodologie en inzichten breder toepasbaar. Schoolgebouwen delen universele kenmerken: rooster-gedreven beweging, periodieke piekbelasting, sterke sociale cohesie, en beperkte keuze in routes. De ontwikkelde tools (BIM-naar-graaf conversie, rooster-simulator) zijn direct toepasbaar op andere scholen mits roosterdata en plattegronden beschikbaar zijn.

Daarnaast zijn inzichten over gedrag (groepscohesie, binnenbocht-voorkeur, telefoonvertraging) waarschijnlijk generaliseerbaar naar adolescenten in vergelijkbare contexten. Universiteiten, met jonge volwassenen en vergelijkbare rooster-structuur maar grotere geografische spreiding, zouden baat hebben bij aangepaste versies van deze aanpak.

6.4 Toekomstperspectieven

6.4.1 Post-occupancy validatie en model-kalibratie

Het nieuwe gebouw biedt een unieke kans voor longitudinaal onderzoek. Na opening in september 2026 kan tracking-data verzameld worden via:

- **Geanonimiseerde camera-analyses:** Computer vision voor crowd density estimation en flow rate metingen op kritieke locaties (hal, trappen, deurpassages)
- **WiFi-sensing:** Aggregated, privacy-preserving positiedata van smartphones voor grootschalige bewegingspatronen
- **Enquêtes en observaties:** Kwalitatieve data over leerling-ervaringen en onverwachte gedragspatronen

Deze data stelt in staat om: (1) het voorspellende vermogen van het model te valideren, (2) parameters te kalibreren aan daadwerkelijk gedrag, en (3) onverwachte fenomenen te identificeren die niet in initiële modellen zaten. Een dergelijke validatiestudie zou unieke wetenschappelijke waarde hebben – crowd dynamics datasets voor scholen zijn schaars in de literatuur.

6.4.2 Verfijning gedragsmodel: van aggregaat naar agent

De grootste wetenschappelijke winst ligt in het verrijken van agenten met realistischer psychologische en sociale drijfveren:

- **Expliciete groepsdynamica:** Agents gekoppeld in dynamische vriendschapsnetwerken (gebaseerd op klassenindeling), met cohesiekrachten naar groepscentrum en afstotende krachten op niet-groepsleden die de groep proberen te doorbreken
- **Smartphone-gebruik als dynamische toestand:** Niet als statische snelheidsvermindering maar als stochastische toestand die perceptieveld verkleint, reactietijd verhoogt, en route-keuze wijzigt naar “volgend” gedrag
- **Ruimtelijk leren en gewenning:** Geheugenmechanisme waarbij agents na iteraties niet langer absoluut kortste pad kiezen, maar pad met historisch laagste vertraging – dit kan organische maar suboptimale routines voorspellen

Deze uitbreidingen transformeren het model van descriptief naar predictief instrument dat ook tweede-orde effecten van interventies kan voorspellen (bijv. hoe lang duurt het voor leerlingen om nieuwe gedragsregels te adopteren?).

6.4.3 Ontwikkeling naar digitale tweeling

Op lange termijn kan het model evolueren naar een *real-time digital twin* – een live simulatie gekoppeld aan sensor-data die facilitair managers waarschuwt voor opkomende knelpunten en dynamische interventies mogelijk maakt (bijv. een extra uitgang openstellen, een looproute tijdelijk omleiden via digitale bewegwijzering).

Dit vereist integratie van: (1) real-time crowd density sensing, (2) efficiënte update-algoritmes voor model-kalibratie on-the-fly, en (3) decision-support interface voor niet-technische gebruikers. Hoewel ambitieus, demonstreren vergelijkbare systemen in stations en luchthavens dat deze technologie haalbaar en waardevol is.

6.5 Afsluitende reflectie

Dit onderzoek toont dat de integratie van wiskundige modellering, empirische psychologie en praktische facilitaire kennis essentieel is voor het ontwerpen van niet alleen functionele, maar ook *veilige, efficiënte en sociale* educatieve ruimtes. De grootste uitdaging is niet technisch maar organisatorisch: het vertalen van modelinzichten naar daadwerkelijk beleid en het overbruggen van de kloof tussen theoretische optimaliteit en praktische haalbaarheid.

Voor het Mondial College betekent dit: de simulaties bieden geen definitieve antwoorden maar een evidence-based vertrekpunt voor besluitvorming. De aanbevelingen – halooptimalisatie, gespreide leswisseltijden, gedragsregels, routebewustzijn – zijn geen vaststaande voorschriften maar hypothesen die in praktijk getest en aangepast moeten worden. Het uitgezette pad biedt een blauwdruk voor evidence-based gebouwbeheer die navolging verdient in de onderwijssector en daarbuiten.

Referenties

03. *Fundamental diagram*. (z.d.). TU Delft OCW. Geraadpleegd op 30 november 2025, van <https://ocw.tudelft.nl/courses/traffic-flow-theory-simulation/subjects/3-fundamental-diagram/>
- Bosina, E., & Meeder, M. (2017, 16 juni). *Simulation of complex pedestrian facilities: Case study of Lausanne main station*. NSL – Netzwerk Stadt und Landschaft. Geraadpleegd op 30 november 2025, van <https://www.nsl.ethz.ch/en/simulation-of-complex-pedestrian-facilities-case-study-of-lausanne-main-station/>
- Charnley, M. (z.d.). Navier-Stokes Equations: An Introduction.
- Chraibi, M., Kratz, K., & Schrödter, T. (z.d.). *Pedestrian Dynamics*. Pedestrian Dynamics. Geraadpleegd op 25 juni 2025, van <https://pedestriandynamics.org/>
- Chraibi, M., Seyfried, A., & Schadschneider, A. (2010). Generalized centrifugal-force model for pedestrian dynamics. *Physical Review E*, 82(4), 046111. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.046111>
- Coie, J. D., Dodge, K. A., & Coppotelli, H. (1982). Dimensions and types of social status: A cross-age perspective. *Developmental Psychology*, 18(4), 557–570. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.18.4.557>
- Corbetta, A., & Toschi, F. (2023). Physics of Human Crowds. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 14(1), 311–333. <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031620-100450>
- Dijkstra, E. W., Beauguitte, L., & Maisonobe, M. (z.d.). E.W. Dijkstra, 1959, A Note on Two Problems in Connexion with Graphs. Numerische Mathematik 1, p. 269271 Version bilingue et commentée.
- Forschungszentrum Jülich, Boltes, M., & Seyfried, A. (2005). *Data Archive of Experimental Data from Studies about Pedestrian Dynamics*. <https://doi.org/10.34735/PED.DA>
- Fu, T., Chen, Y., Chen, Z., Zhao, M., Li, B., & Xue, X. (2025, 3 juli). *CrowdTrack: A Benchmark for Difficult Multiple Pedestrian Tracking in Real Scenarios*. arXiv: 2507.02479 [cs]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.02479>
- Granville, V., Krivanek, M., & Rasson, J.-P. (1994). Simulated Annealing: A Proof of Convergence. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(6), 652–656. <https://doi.org/10.1109/34.295910>
- Helbing, D., & Johansson, A. (2013, 6 september). *Pedestrian, Crowd, and Evacuation Dynamics*. arXiv: 1309.1609 [physics]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1309.1609>
- Helbing, D., & Molnar, P. (1995). Social Force Model for Pedestrian Dynamics. *Physical Review E*, 51(5), 4282–4286. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.4282>
- Henderson, L. (1974). On the fluid mechanics of human crowd motion. *Transportation Research*, 8(6), 509–515. [https://doi.org/10.1016/0041-1647\(74\)90027-6](https://doi.org/10.1016/0041-1647(74)90027-6)
- Homepage - Crowdflow Research Group - TU/e. (z.d.). Crowdflow Research Group. Geraadpleegd op 25 juni 2025, van <https://crowdflow.phys.tue.nl/wordpress/>
- huntabyte. (z.d.). *Schoolgids*. Draait om jou. Geraadpleegd op 7 oktober 2025, van <https://draaitomjou.nl/informatie/beleid/schoolgids>
- Karamouzas, I., Skinner, B., & Guy, S. J. (2014). Universal Power Law Governing Pedestrian Interactions. *Physical Review Letters*, 113(23), 238701. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.238701>
- Khan, M. A., Menouar, H., & Hamila, R. (2022, 14 september). *Revisiting Crowd Counting: State-of-the-art, Trends, and Future Perspectives*. arXiv: 2209.07271 [cs]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.07271>
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220(4598), 671–680. <https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671>
- Kreiss, S. (2021, 24 september). *Deep Social Force*. arXiv: 2109.12081 [cs]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.12081>
- LeBon, G., 1841-1931. (2017). *The crowd*. Routledge. OCLC: 995849673.
- Leisink, B., & Yazvin, J. (2025). Unfolding the Infinite: Het Ontwikkelen van n-Dimensionale Polytopen Naar (n-1)-Dimensionale Netstructuren. <https://pws.bramleisink.nl>
- Li, T., Xu, B., Lu, W., Chen, Z., Zhang, S., & Xia, F. (2024). The Parameter Calibration of Social Force Model for Pedestrian Flow Simulation Based on YOLOv5. *Sensors*, 24(15), 5011. <https://doi.org/10.3390/s24155011>
- Lighthill, M. J., & Whitham, G. B. (1955). On Kinematic Waves. II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 229, 317–345. <https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0089>
ADS Bibcode: 1955RSPSA.229..317L.

- Lügering, H., Adrian, J., Boltjes, M., Kandler, A., & Sieben, A. (2024). *Propagation of Information in Waiting Crowds*. <https://doi.org/10.34735/PED.2022.5>
- Mondial College. (2025). *Locatie Leuvenbroek gaat verhuizen*. Geraadpleegd op 27 juni 2025, van <https://mondialcollege.nl/verhuizen>
- Mondial College – Nijmegen – AGS Architects. (2023, 27 juli). Geraadpleegd op 28 juni 2025, van <https://www.agsarchitects.net/2023/07/27/modial-college-01/>
- Moussaid, M., Helbing, D., & Theraulaz, G. (2011). How Simple Rules Determine Pedestrian Behavior and Crowd Disasters. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(17), 6884–6888. <https://doi.org/10.1073/pnas.1016507108>
- Moussaïd, M., Perozo, N., Garnier, S., Helbing, D., & Theraulaz, G. (2010). The Walking Behaviour of Pedestrian Social Groups and Its Impact on Crowd Dynamics. *PLOS ONE*, 5(4), e10047. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0010047>
- Onofri, E., & Corbetta, A. (2022). RSSI-based Visitor Tracking in Museums via Cascaded AI Classifiers and Coloured Graph Representations. *Collective Dynamics*, 6, 1. <https://doi.org/10.17815/CD.2021.131>
- Parisi, D. R., Sartorio, A. G., Colonnello, J. R., Garcimartín, A., Pugnali, L. A., & Zuriguel, I. (2021). Pedestrian Dynamics at the Running of the Bulls Evidence an Inaccessible Region in the Fundamental Diagram. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118(50), e2107827118. <https://doi.org/10.1073/pnas.2107827118>
- Popkin, G. (z.d.). Swirling Bacteria Illuminate the Strange Physics of Swarms [magazine]. *Wired*. Geraadpleegd op 25 juni 2025, van <https://www.wired.com/2017/05/swirling-bacteria-illuminate-strange-physics-swarms/>
- Postmes, T., & Spears, R. (1998). Deindividuation and antinormative behavior: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 123(3), 238–259. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.123.3.238>
- Pouw, C. A. S., Vleuten, G. G. M. van der, Corbetta, A., & Toschi, F. (2024). Data-Driven Physics-Based Modeling of Pedestrian Dynamics. *Physical Review E*, 110(6), 064102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.110.064102>
- Renovatie en uitbreiding Energieweg 93 te Nijmegen t.b.v. het Mondial College - Stichting @voCampus*. (z.d.). Geraadpleegd op 28 juni 2025, van <https://www.tenderned.nl/aankondigingen/overzicht/356070>
- Renovatie en uitbreiding Mondial College Nijmegen*. (z.d.). Rots Bouw. Geraadpleegd op 28 juni 2025, van <https://www.rotsbouw.nl/projecten/renovatie-en-uitbreiding-mondial-college-nijmegen/>
- Seyfried, A., Steffen, B., & Lippert, T. (2006). Basics of Modelling the Pedestrian Flow. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 368(1), 232–238. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.11.052>
- Snape, J. (z.d.). *Optimal Reciprocal Collision Avoidance (ORCA)*. Optimal Reciprocal Collision Avoidance (ORCA). Geraadpleegd op 5 september 2025, van <https://gamma.cs.unc.edu/ORCA/>
- Van Den Berg, J., Guy, S. J., Lin, M., & Manocha, D. (2011). Reciprocal n-Body Collision Avoidance. In C. Pradalier, R. Siegwart, & G. Hirzinger (Eds.). B. Siciliano, O. Khatib, & F. Groen (Ed.), *Robotics Research* (pp. 3–19, Deel 70). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-19457-3_1
- Vleuten, G. G. M. van der, Toschi, F., Schilders, W. H. A., & Corbetta, A. (2024). Stochastic Fluctuations of Diluted Pedestrian Dynamics along Curved Paths. *Physical Review E*, 109(1), 014605. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.109.014605>
- Weisstein, E. W. (z.d.). *Gini Coefficient*. Geraadpleegd op 2 december 2025, van <https://mathworld.wolfram.com/GiniCoefficient.html>

A Fundamenteel diagram van voetgangersstromen

De voetgangersflux J is het product van dichtheid ρ en snelheid $v(\rho)$, waarbij de snelheid afneemt bij toenemende dichtheid volgens de Greenshields-relatie:

$$v(\rho) = v_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right), \quad (14)$$

met $v_0 \approx 1.3$ m/s de vrije snelheid en $\rho_{\max} \approx 5$ pers/m² de maximale dichtheid. De flux wordt:

$$J(\rho) = \rho \cdot v(\rho) = v_0 \left(\rho - \frac{\rho^2}{\rho_{\max}}\right), \quad (15)$$

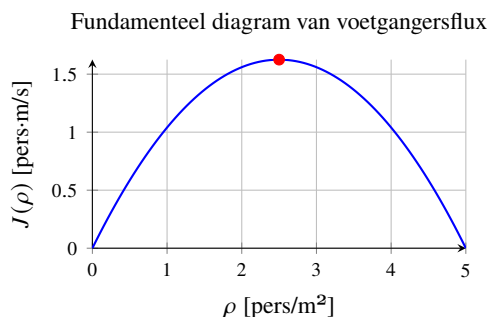
een dalparabool in ρ . Om het maximum van de flux te vinden, nemen we de afgeleide naar ρ en stellen deze gelijk aan nul:

$$\frac{dJ}{d\rho} = v_0 \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{\max}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{opt}} = \frac{\rho_{\max}}{2} \approx 2.5. \quad (16)$$

Bij deze dichtheid is de stroom van voetgangers optimaal. De bijbehorende maximale flux is:

$$J_{\max} = J(\rho_{\text{opt}}) = v_0 \frac{\rho_{\max}}{4} \approx 1.625 \text{ pers}\cdot\text{m/s}. \quad (17)$$

In de praktijk wordt ρ_{opt} vaak iets lager door interacties tussen voetgangers.



Figuur 11. Flux $J(\rho)$ als functie van dichtheid ρ . Het maximum bij ρ_{opt} geeft de optimale mensenstroom aan.

Concreet betekent dit dat bij een te hoge dichtheid de snelheid daalt en de doorstroming afneemt, terwijl bij een lage dichtheid de ruimte niet volledig benut wordt. Voor efficiënte mensenstromen is het belangrijk dichtheden rond ρ_{opt} aan te houden.

B Empirische Analyse – van betrokkenen

Dit hoofdstuk presenteert een kwalitatieve analyse van interviews met sleutelpersoon Chris Pauls (roostermaker), drie docenten (Henk Kerssies, Mark van Aarsel, Laura Veensta) en drie leerlingen (één uit de tweede klas, twee uit de zesde klas) van het Mondial College. Het doel is om de praktische randvoorwaarden, pedagogische afwegingen en persoonlijke ervaringen met betrekking tot leswisselingen en roosteraanpassingen in kaart te brengen.

B.1 Inzichten van de roostermaker

Uit het interview met roostermaker Chris Pauls blijkt dat het roosterproces sterk gestuurd wordt door gespecialiseerde software. Pauls legde uit: “De roosters worden niet door de roostermakers zelf gemaakt, maar door het programma Zermelo. De roostermakers verzamelen alle benodigde informatie en voeren die in bij Zermelo. Nadat het programma een eerste versie van het rooster heeft gegenereerd, voeren de roostermakers nog enkele laatste aanpassingen uit voordat het rooster wordt gepubliceerd.”

Pauls benadrukte de complexiteit van het proces: “Bij het maken van een rooster moeten de roostermakers met veel verschillende aspecten rekening houden — niet alleen voor de leerlingen, maar ook voor de docenten. Dat maakt het soms lastig om alles passend te krijgen.”

Om dit te managen, wordt er gewerkt met een systeem van wensen en eisen. Pauls lichtte toe: “Samen met de teamleider bepalen ze wat echt noodzakelijk is (de eisen) en wat wenselijk is, maar eventueel kan worden losgelaten (de wensen). Als blijkt dat niet alle eisen in het rooster kunnen worden verwerkt, overleggen de roostermakers opnieuw met de teamleider om samen tot een oplossing te komen.”

Over de prioritering zei Pauls: “De belangrijkste eisen hebben te maken met de werkdagen van docenten, het aantal lessen per vak en het aantal uren van leerlingen. Pas daarna worden de lessen over de week en de beschikbare lokalen verdeeld. De roostermakers proberen er daarbij voor te zorgen dat docenten zo min mogelijk van lokaal hoeven te wisselen tijdens pauzes, en dat leerlingen zo min mogelijk tussenuren hebben — al is dat niet altijd haalbaar.”

Pauls dacht actief mee over mogelijke alternatieven.

B.1.1 Lessen van zestig minuten

Zij concludeerde dat dit niet ideaal is: “Leerlingen zouden dan voor sommige vakken nog maar één of twee lessen per week hebben, waardoor bij ziekte of uitval snel achterstanden ontstaan.”

B.1.2 Vast lokaal per klas

Vanuit eerdere ervaringen op het Mondial College bleek dit problematisch. Pauls stelde: “In theorie klinkt dit praktisch, maar uit eerdere ervaringen op het Mondial College bleek dat dit juist averechts werkt. Leerlingen gaan hun lokaal als ‘hun eigen plek’ zien en beschouwen de docent als een gast, wat de leerling-docentrelatie niet ten goede komt.”

B.1.3 Clusteren van leerlingen per vleugel

Hoewel dit vanuit doorstroomperspectief logisch zou zijn, is het praktisch moeilijk. Pauls legde uit: “Dit bleek echter ook niet ideaal, omdat de vaksecties dan niet meer bij elkaar zitten. Docenten willen juist dicht bij elkaar werken om gemakkelijk te kunnen overleggen. Daardoor is dit idee in de praktijk nauwelijks uitvoerbaar.” Desalniettemin gaf ze aan: “Dit zou echter wél het meest logische uitgangspunt zijn als er ooit iets aan de roosters wordt veranderd.”

B.2 Perspectieven van docenten

De drie geïnterviewde docenten Henk Kerssies, Mark van Aarsel en Laura Veensta deelden gedetailleerd hun visie.

B.2.1 Vast lokaal per klas

Alle docenten waren uitgesproken negatief over het idee dat leerlingen in een vast lokaal blijven. Henk Kerssies argumenteerde: “Want wanneer leerlingen een vast lokaal hebben, gaan zij dat lokaal al snel als hun eigen plek zien. Dit kan leiden tot een gevoel van eigendom, waardoor docenten telkens opnieuw hun positie in de ruimte moeten innemen of zelfs een strijd moeten voeren om orde en structuur te behouden.”

Hij voegde een pedagogisch argument toe: “Daarnaast hebben leerlingen behoefte aan beweging gedurende de dag. De leswisselingen zorgen voor een natuurlijke vorm van beweging en een korte mentale reset tussen de lessen, wat hun concentratie en energie ten goede komt.”

Mark van Aarsel sloot zich hierbij aan: “Hij geeft aan dat leerlingen het lokaal dan al snel als hun eigen plek gaan beschouwen, waardoor ze zich minder als gast zullen gedragen.” Hij wees op een praktisch risico: “Daarnaast bestaat het risico dat leerlingen hun pauzes in dat lokaal gaan doorbrengen, met alle rommel en onrust van dien.”

Laura Veensta zag bovendien geen oplossing voor het doorstroomprobleem. Zij stelde: “Volgens haar werkt dit niet als oplossing voor de drukte in de school, omdat het op dit moment al zó vol en chaotisch is dat niet alleen leerlingen door het gebouw bewegen, maar ook de docenten constant moeten wisselen van lokaal.”

Zij maakte een belangrijk onderscheid en pleitte voor vaste lokalen voor docenten: “Op dit moment slepen docenten de hele dag met spullen zoals laptops, boeken, schriften, materialen en persoonlijke spullen. Als docenten een vast lokaal zouden hebben, zouden ze hun spullen kunnen laten liggen en efficiënter kunnen werken.”

B.2.2 Lesduur en roosterstructuur

Langere lessen Langere lessen genoten brede steun onder de docenten. Henk Kerssies prefereerde lessen van ongeveer 60 minuten: “Lessen van ongeveer 60 minuten hebben daarom de voorkeur, met zes tot zeven lessen per dag als optimaal aantal.”

Mark van Aarsel beschouwde dit als een goede middenweg: “Langere lessen van ongeveer een uur bieden een goede middenweg: er blijven voldoende leswisselingen over om leerlingen de kans te geven om even te bewegen, maar het aantal wisselmomenten wordt verminderd.”

Laura Veensta benadrukte de didactische voordelen: “In langere lessen is meer tijd voor uitleg, zelfstandig werken, verdieping en vragen stellen, waardoor de les niet zo gehaast voelt.”

Blokuren De meningen waren verdeeld. Henk Kerssies zag beperkte voordelen, terwijl Mark van Aarsel kritischer was. Laura Veensta was gematigd positief.

Extra wisseltijd Henk Kerssies en Mark van Aarsel waren geen voorstander van extra tijd tussen lessen. Laura Veensta stond hier positiever tegenover, mits dit goed wordt gepland en de uitvoerbaarheid voor leerlingen gewaarborgd blijft.

B.3 Perspectieven van leerlingen

B.3.1 Leerling uit de tweede klas

De tweede klasser was positief over een vast lokaal, maar negatief over extra wisseltijd als dat leidt tot later uit zijn. Hij was kritisch over alleen maar blokuren en gaf een voorwaardelijke voorkeur voor iets langere lessen.

B.3.2 Zesde klas – leerling a

Deze leerling was duidelijk tegen een vast lokaal en tegen extra wisseltijd. Hij wees blokuren af en had minder bezwaar tegen iets langere lessen.

B.3.3 Zesde klas – leerling b

Deze leerling was pragmatischer over vaste lokalen en pleitte voor een streven naar clustering. Zij was voorstander van langere lessen, voorzichtig positief over blokuren en positief over extra wisseltijd, mits dit niet leidt tot later uit zijn.

B.4 Conclusie van de interviewanalyse

De interviews tonen een complex speelveld van botsende belangen en perspectieven. De roostermaker wijst op harde logistieke en wettelijke kaders. De docenten benadrukken pedagogische grenzen rond territoriumgedrag bij vaste leerlinglokalen, terwijl tegelijk wordt gepleit voor vaste docentenlokalen om de werkdruk te verlagen.

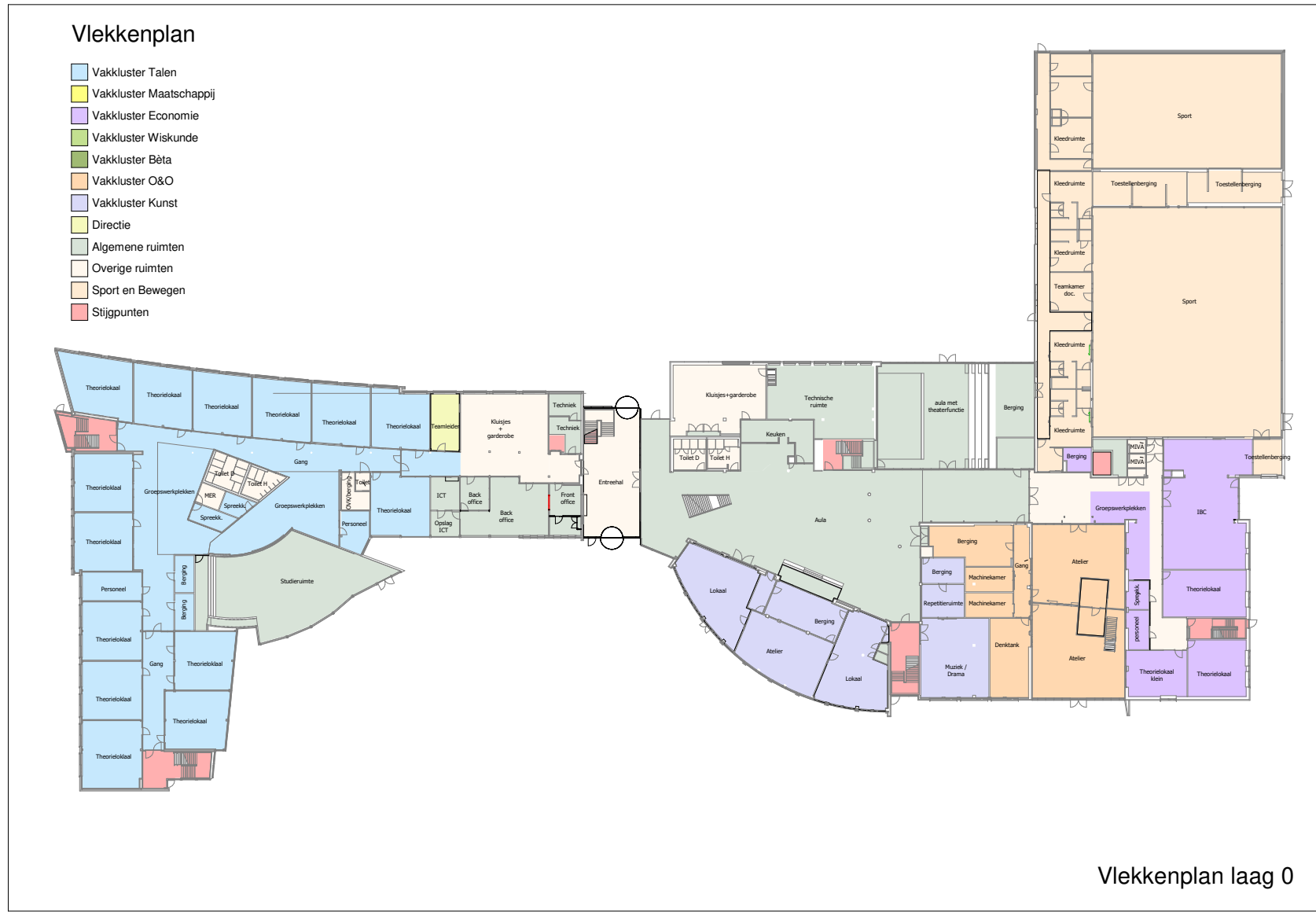
Leerlingen verschillen in voorkeuren, maar delen een duidelijke grens: zij willen niet langer op school blijven. Er is echter één duidelijke lijn van overeenstemming: langere lessen van circa 60 minuten worden door vrijwel alle groepen gezien als een haalbare en wenselijke interventie. Deze maatregel verdient daarom prioriteit in verder beleidsonderzoek en implementatie.

C Vlekkenplannen

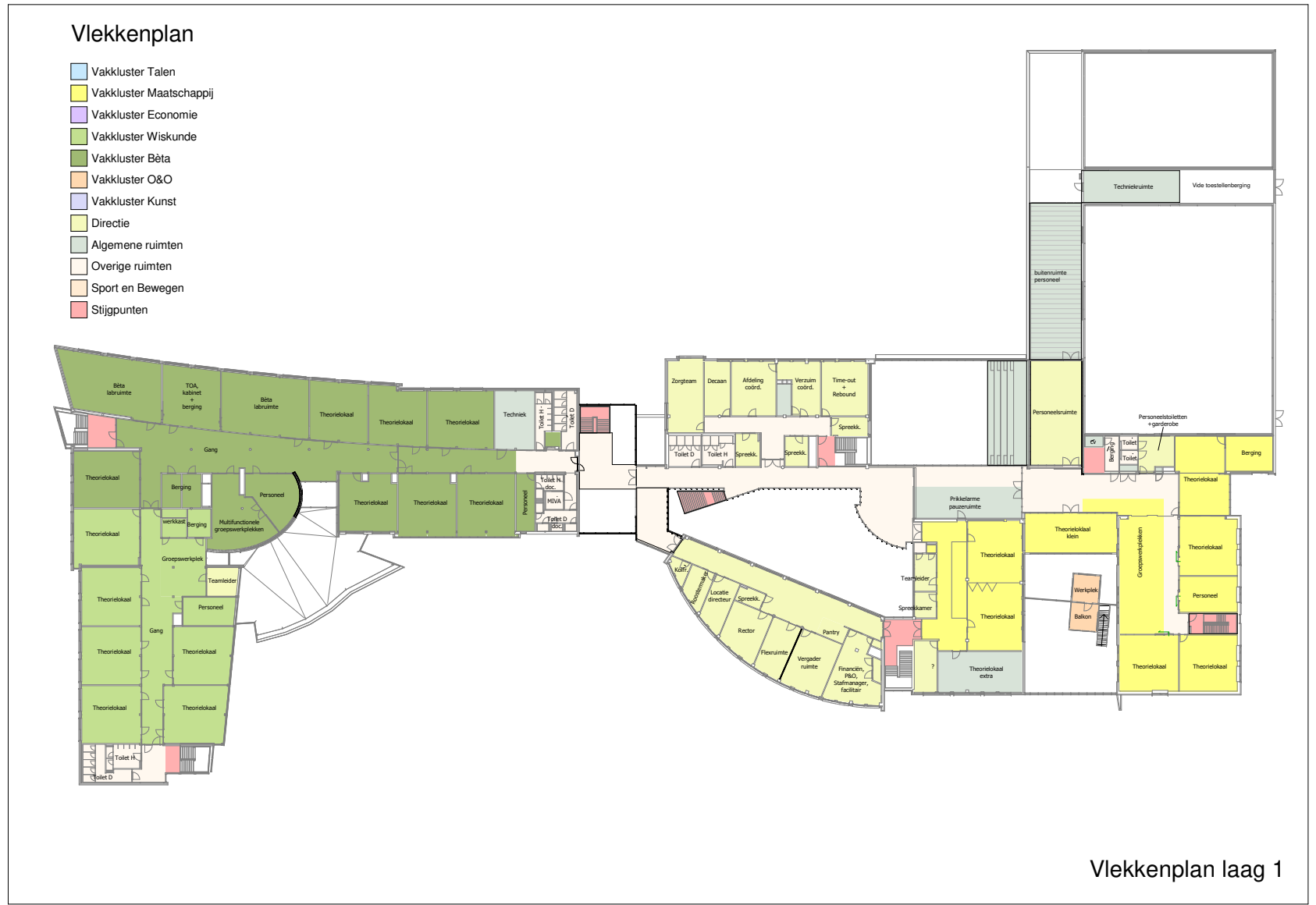
Zie figuur 12 en 13.

D Leerlingstromen heatmaps

Zie figuur 14 en 15.

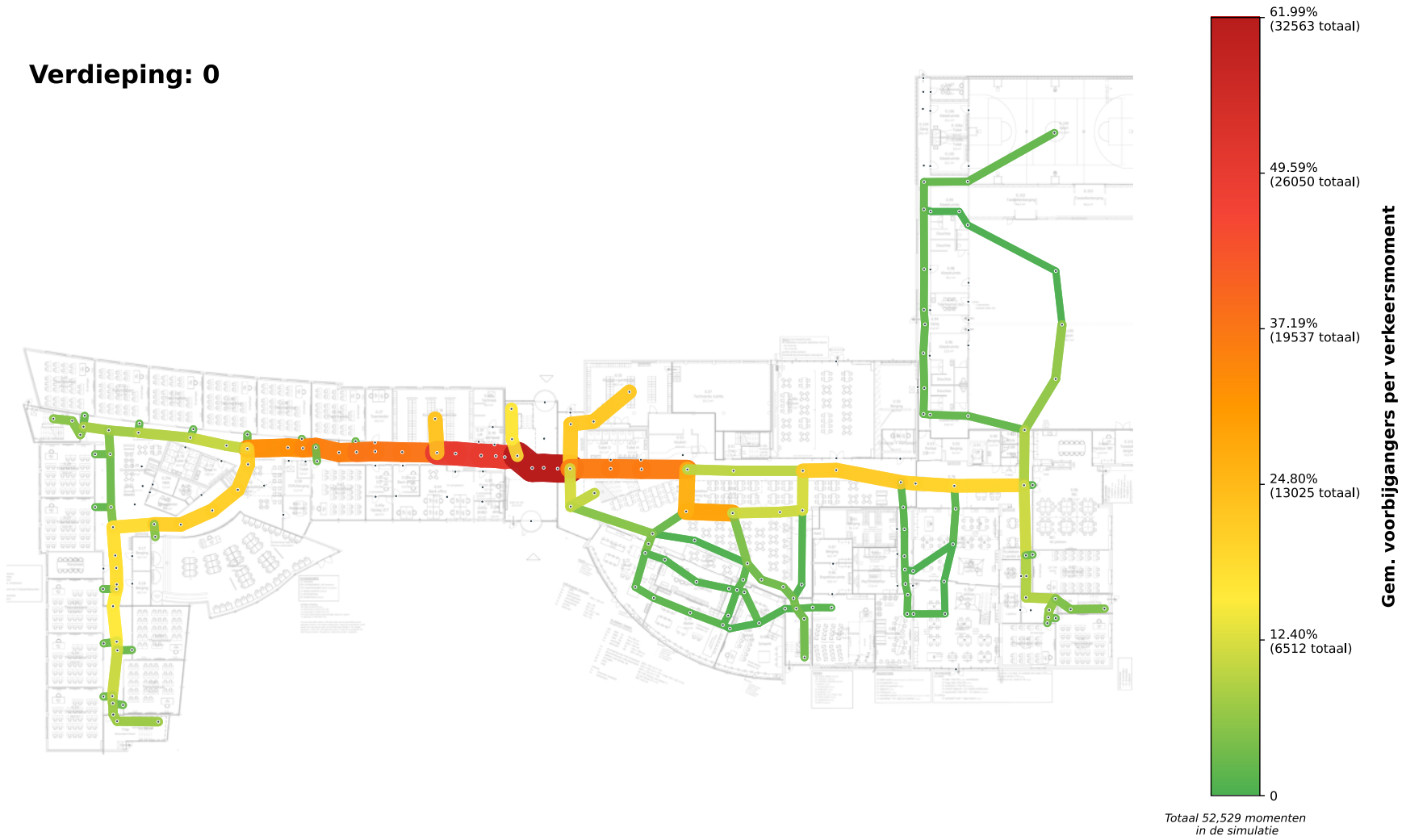


Figuur 12. Plattegrond begane grond nieuwe schoolgebouw.



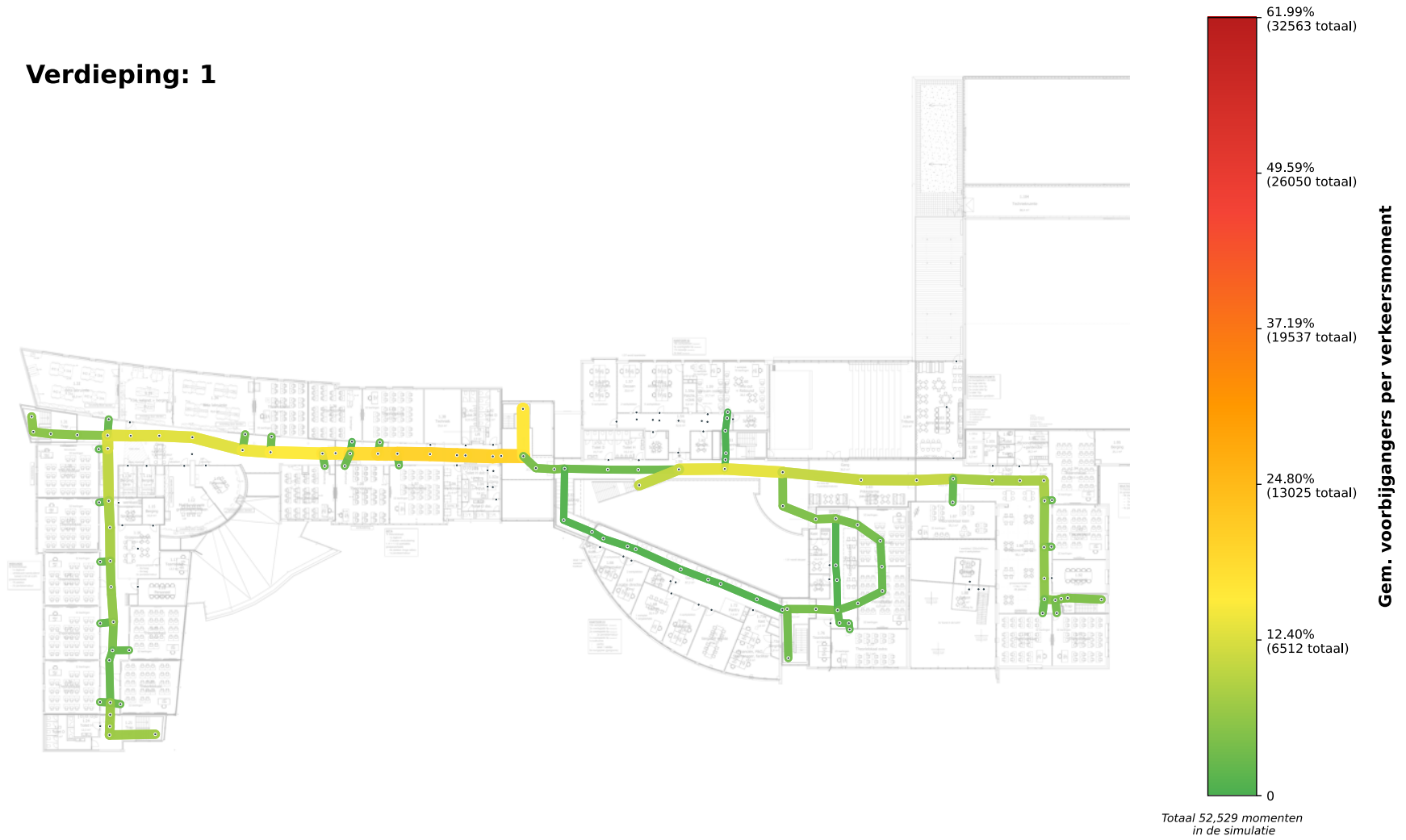
Figuur 13. Plattegrond eerste verdieping nieuwe schoolgebouw.

Verdieping: 0



Figuur 14. Heatmap van gangbelasting begane grond. De kleuren geven de kans weer dat een willekeurige leerlingverplaatsing door het gebouw over een bepaalde gang gaat. odere kleuren duiden op hogere belasting.

Verdieping: 1



Figuur 15. Heatmap van gangbelasting eerste verdieping. De kleuren geven de kans weer dat een willekeurige leerlingverplaatsing door het gebouw over een bepaalde gang gaat. Rodere kleuren duiden op hogere belasting.

E Afstanden tussen lokalen

	0.07	0.12	0.19	0.20	0.23	0.24	0.25	0.27	0.28	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.64	0.65	0.68	0.70	0.72	0.78	0.79	0.82	0.83	0.85	0.86
0.07		31.13	53.55	60.12	58.96	52.19	45.09	39.8	35.09	34.75	27.1	20.08	12.99	4.87	8.88	98.95	79.71	74.4	68.18	55.27	96.27	104.02	120.3	120.53	108.1	98.93
0.12			25.83	32.4	31.24	24.46	17.37	12.08	19.09	25.16	25.52	29.1	22	28.79	36.26	126.33	107.08	101.77	95.55	82.65	123.64	131.4	147.68	147.9	135.48	126.31
0.19				10.49	9.33	4.9	12.08	23.43	30.44	36.51	36.87	43.83	44.42	51.21	58.67	148.74	129.5	124.19	117.97	105.06	146.06	153.81	170.09	170.32	157.89	148.73
0.20					3.56	11.47	18.65	30	37.01	43.08	43.44	50.4	50.99	57.78	65.25	155.31	136.07	130.76	124.54	111.64	152.63	160.38	176.66	176.89	164.46	155.3
0.23						10.31	17.49	28.84	35.85	41.92	42.28	49.25	49.83	56.62	64.09	154.16	134.91	129.6	123.38	110.48	151.47	159.23	175.51	175.73	163.31	154.14
0.24							10.72	22.07	29.08	35.15	35.51	42.47	43.05	49.84	57.31	147.38	128.14	122.83	116.61	103.7	144.7	152.45	168.73	168.96	156.53	147.36
0.25								14.97	21.98	28.05	28.41	35.37	35.96	42.75	50.21	140.28	121.04	115.73	109.51	96.6	137.6	145.35	161.63	161.86	149.43	140.27
0.27									11.28	17.35	17.71	24.67	30.67	37.46	44.93	135	115.76	110.45	104.23	91.32	132.32	140.07	156.35	156.58	144.15	134.98
0.28										10.13	10.49	17.46	25.96	32.75	40.22	130.29	111.04	105.73	99.51	86.61	127.6	135.36	151.64	151.86	139.44	130.27
0.31											10.15	17.11	25.61	32.4	39.87	129.94	110.7	105.39	99.17	86.26	127.26	135.01	151.29	151.52	139.09	129.92
0.32												9.47	17.97	24.76	32.23	122.3	103.05	97.74	91.52	78.62	119.61	127.37	143.65	143.87	131.45	122.28
0.33													10.95	17.74	25.21	115.28	96.04	90.72	84.51	71.6	112.59	120.35	136.63	136.86	124.43	115.26
0.34														10.65	18.11	108.18	88.94	83.63	77.41	64.5	105.5	113.25	129.53	129.76	117.33	108.17
0.35															10	100.07	80.82	75.51	69.29	56.39	97.38	105.14	121.42	121.64	109.22	100.05
0.36																93	73.76	68.44	62.23	49.32	90.31	98.07	114.35	114.57	102.15	92.98
0.64																	54.66	55.42	65.15	60.2	13.56	5.07	53.28	53.51	41.08	31.92
0.65																		10.24	19.97	51.98	59.73	76.01	76.24	63.81	54.64	
0.68																			9.73	19.12	52.74	60.49	76.77	77	64.57	55.4
0.70																				12.91	62.47	70.22	86.5	86.73	74.3	65.13
0.72																					57.51	65.27	81.55	81.77	69.35	60.18
0.78																						9.49	39.73	39.95	27.53	18.36
0.79																							49.22	49.44	37.02	27.85
0.82																								1.78	14.01	23.69
0.83																									14.24	23.92
0.85																										11.49
0.86																										
1.07																										
1.08																										
1.09																										
1.19																										
1.20																										
1.26																										
1.27																										
1.28																										
1.29																										
1.30																										
1.32																										
1.34																										
1.35																										
1.36																										
1.37																										
1.78																										
1.79																										
1.77																										
1.87																										
1.89																										
1.90																										
1.93																										
1.94																										
0.100																										
0.108																										

	1.07	1.08	1.09	1.19	1.20	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30	1.32	1.34	1.35	1.36	1.37	1.78	1.79	1.77	1.87	1.89	1.90	1.93	1.94	0.100	0.108	
0.07	62.27	68.85	72.44	84.78	80.35	80.36	80.51	71.89	63.77	56.67	55.83	74.16	77.86	68.65	64.84	102.61	97.98	99.86	105.33	132.17	133.03	124.28	118.07	120.54	169.35	
0.12	84.8	78.69	74.86	60.57	52.63	52.64	63.94	62.31	54.19	47.09	46.25	64.58	68.28	78.48	82.14	129.98	125.36	127.23	132.7	159.55	160.4	151.65	145.44	147.91	196.73	
0.19	96.15	90.03	86.2	38.66	30.72	30.73	42.03	49.79	57.82	58.43	57.6	75.92	79.62	89.83	93.49	152.4	147.78	149.65	155.12	181.96	182.82	174.07	167.86	170.33	219.14	
0.20	98.31	92.19	88.36	30.96	23.02	23.03	34.33	42.09	50.12	57.04	59.76	78.09	81.78	91.99	95.65	158.97	154.35	156.22	161.69	188.53	189.39	180.64	174.43	176.9	225.72	
0.23	99.08	92.96	89.14	31.73	23.79	23.8	35.1	42.86	50.89	57.81	60.53	78.86	82.56	92.76	96.42	157.81	153.19	155.06	160.53	187.38	188.23	179.48	173.27	175.74	224.56	
0.24	94.78	88.67	84.84	39.64	31.71	31.71	43.01	50.78	58.8	57.07	56.24	74.56	78.26	88.47	92.12	151.04	146.41	148.29	153.76	180.6	181.46	172.71	166.5	168.97	217.78	
0.25	87.69	81.57	77.74	46.82	38.89	38.9	50.2	57.96	57.07	49.97	49.14	67.46	71.16	81.37	85.03	143.94	139.32	141.19	146.66	173.5	174.36	165.61	159.4	161.87	210.68	
0.27	76.98	70.87	67.04	58.17	50.24	50.24	61.54	54.49	46.37	39.27	38.44	56.76	60.46	70.67	74.32	138.65	134.03	135.91	141.38	168.22	169.08	160.33	154.12	156.59	205.4	
0.28	69.77	63.65	59.83	60.17	57.25	57.26	55.9	47.28	39.16	32.06	31.22	49.55	53.25	63.45	67.11	133.94	129.32	131.2	136.66	163.51	164.36	155.61	149.4	151.87	200.69	
0.31	62.6	56.48	52.65	53	59.21	59.22	48.73	40.11	31.99	24.89	24.05	42.38	46.08	56.28	59.94	133.6	128.97	130.85	136.32	163.16	164.02	155.27	149.06	151.53	200.34	
0.32	69.78	63.67	59.84	60.18	63.68	63.68	55.91	47.29	39.17	32.07	31.23	49.56	53.26	63.46	67.12	125.95	121.33	123.21	128.68	155.52	156.37	147.62	141.41	143.88	192.7	
0.33	76.75	70.63	66.8	67.15	70.64	70.65	62.88	54.26	46.14	39.04	38.2	56.53	60.23	70.43	74.09	118.93	114.31	116.19	121.66	148.5	149.36	140.61	134.39	136.87	185.68	
0.34	71.5	78.09	75.31	75.65	71.22	71.23	71.38	62.76	54.64	47.54	46.7	65.03	68.73	77.88	74.07	111.84	107.22	109.09	114.56	141.4	142.26	133.51	127.3	129.77	178.58	
0.35	63.38	69.97	73.56	82.44	78.01	78.02	78.17	69.55	61.43	54.33	53.49	71.82	75.52	69.77	65.96	103.72	99.1	100.98	106.44	133.29	134.14	125.39	119.18	121.65	170.47	
0.36	56.32	62.9	66.49	89.91	85.48	85.49	85.64	77.02	68.9	61.8	60.96	77.68	73.84	62.7	58.89	96.65	92.03	93.91	99.38	126.22	127.07	118.33	112.11	114.58	163.4	
0.64	103.14	109.73	113.32	171.79	175.55	175.56	167.52	158.9	150.78	143.68	142.84	124.5	120.66	109.52	105.71	78.48	85.21	75.73	96.99	67.62	66.01	73.68	79.93	53.52	102.34	
0.65	83.9	90.48	94.07	152.54	156.31	156.32	148.28	139.66	131.54	124.43	123.6	105.26	101.42	90.28	86.47	33.29	40.03	30.55	77.1	90.35	88.74	96.05	89.84	76.25	125.06	
0.68	78.59	85.17	88.76	147.23	151	151	142.96	134.35	126.22	119.12	118.29	99.95	96.11	84.97	81.16	34.05	40.79	31.31	77.87	91.11	89.5	96.81	90.6	77.01	125.82	
0.70	72.37	78.95	82.54	141.02	144.78	144.79	136.75	128.13	120.01	112.91	112.07	93.73	89.89	78.75	74.94	43.78	50.52	41.04	87.59	100.84	99.23	106.54	100.33	86.74	135.55	
0.72	59.46	66.05	69.64	128.11	131.87	131.88	123.84	115.22	107.1	100	99.16	80.82	76.98	65.85	62.04	53.18	59.92	50.43	96.99	95.88	94.27	101.95	108.2	81.78	130.6	
0.78	100.46	107.04	110.63	169.1	172.87	172.87	164.83	156.22	148.09	140.99	140.16	121.82	117.98	106.84	103.03	75.79	82.53	73.05	83.43	54.06	52.45	60.13	66.37	39.96	88.78	
0.79	108.21	114.8	118.39	176.86	180.62	180.63	172.59	163.97	155.85	148.75	147.91	129.57	125.73	114.59	110.78	83.55	90.28	80.8	92.92	63.55	61.94	69.62	75.86	49.45	98.27	
0.82	124.42	131.01	134.6	193.07	196.9	196.91	188.8	180.19	172.06	164.96	164.13	145.79	141.94	130.81	127	95.97	89.23	97.08	50.72	21.35	19.74	27.42	33.66	45.3	94.11	
0.83	124.65	131.23	134.83	193.3	197.13	197.13	189.03	180.41	172.29	165.19	164.35	146.01	142.17	131.03	127.22	96.19	89.46	97.31	50.94	21.58	19.97	27.64	33.89	45.52	94.34	
0.85	112.29	118.88	122.47	180.94	184.7	184.71	176.67	168.05	159.93	152.83	151.99	133.65	129.81	118.67	114.86	87.63	94.36	84.88	57.72	28.35	26.74	34.41	40.66	33.1	81.91	
0.86	103.12	109.71	113.3	171.77	175.53	175.54	167.5	158.89	150.76	143.66	142.83	124.49	120.65	109.51	105.7	78.46	85.2	75.71	67.39	38.03	36.42	44.09	50.34	23.93	72.74	
1.07		9.76	13.35	71.82	78.04	78.05	67.55	58.94	50.81	43.71	42.88	24.54	20.7	9.56	5.75	77.31	72.69	74.56	80.03	106.88	108.19	98.98	92.77	124.73	173.54	
1.08			7.24	65.71	71.92	71.93	61.44	52.82	44.7	37.6	36.76	18.42	14.58	3.44	7.1	83.89	79.27	81.15	86.62	113.46	114.78	105.57	99.36	131.31	180.13	
1.09				61.88	68.09	68.1	57.61	48.99	40.87	33.77	32.93	14.59	10.75	7.03	10.69	87.48	82.86	84.74	90.21	117.05	118.37	109.16	102.95	134.9	183.72	
1.19					10.69	10.69	7.84	15.61	23.63	30.55	33.27	51.6	55.3	65.5	69.16	145.96	141.34	143.21	148.68	175.52	176.84	167.63	161.42	193.37	242.19	
1.20					2.76	14.06	21.82	29.85	36.77	39.49	57.82	61.52	71.72	75.38	152.17	147.55	149.43	154.9	181.74	183.06	173.85	167.63	197.14	245.95		
1.26						14.07	21.83	29.85	36.78	39.5	57.82	61.52	71.73	75.39	152.18	147.56	149.43	154.9	181.75	183.06	173.85	167.64	197.14	245.96		
1.27							11.34	19.36	26.28	29.01	47.33	51.03	61.24	64.89	141.69	137.07	138.94	144.41	171.25	172.57	163.36	157.15	189.11	237.92		
1.28								10.75	20.39	38.72	42.41	52.62	56.28	133.07	128.45	130.33	135.79	162.64	163.95	154.74	148.53	180.49	229.3			
1.29									9.54	12.27	30.59	34.29	44.5	48.15	124.95	120.33	122.2	127.67	154.51	155.83	146.62	140.41	172.36	221.18		
1.30										5.16	23.49	27.19	37.39	41.05	117.85	113.22	115.1	120.57	147.41	148.73	139.52	133.31	165.26	214.08		
1.32											22.66	26.35	36.56	40.22	117.01	112.39	114.27	119.73	146.58	147.9	138.68	132.47	164.43	213.24		
1.34												8.01	18.22	21.88	98.67	94.05	95.93	101.4	128.24	129.56	120.34	114.13	146.09	194.9		
1.35													14.38	18.04	94.83	90.21	92.09	97.55	124.4	125.71	116.5	110.29	142.25	191.06		
1.36														6.9	83.69	79.07	80.95	86.42	113.26	114.58	105.37	99.15	131.11	179.93		
1.37															79.88	75.26	77.14	82.61	109.45	110.77	101.56	95.34	127.3	176.12		
1.78																	6.74	10.38	51.58	78.42	79.74	70.53	64.32	100.06	148.88	
1.79																		17.12	44.84	71.68	73	63.79	57.58	106.8	155.62	
1.77																			54.2	81.04	82.36	73.15	66.93	97.32	146.13	
1.87																				33.17	34.49	25.28	19.06	89	137.81	
1.89																					5.12	9.87	16.12	59.63	108.45	
1.90																						11.19	17.43	58.02	106.84	
1.93																							8.22	65.7	114.51	
1.94																								71.94	120.76	
0.100																									50.4	
0.108																										